Fiche Exercices 2

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=8$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}85\,u_n+1{,}8$.

1. Sur une feuille de papier millimétré construire un repère orthonormé (unité 1 cm), où l'axe des ordonnées est placé à gauche de la feuille.

1.a. Dans ce repère , tracer les droites d'équations respectives y=0,85x+1,8 et y=x.

1.b. Dans ce repère placer u_0 sur l'axe des abscisses puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1 ; u_2 et u_3 .
On laissera apparents les traits de construction.

1.c. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n) .

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $v_n=u_n-12$.

2.a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2.b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=12-4\times 0{,}85^n$.

2.c. Donner le sens de variation de la suite (v_n) . En déduire celui de la suite (u_n) .

2.d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

3. Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :
- il y a 800 nouveaux abonnés chaque année.
- d'une année sur l'autre , 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2008, il y avait 8000 abonnés.

3.a. Montrer que cette situation peut-être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en (2008+n).

3.b. En utilisant la question 2.b., calculer une estimation du nombre d'abonnés en 2014.

Bac TES juin 2009 Polynésie

Exercice 2

Lors d'un jeu, Marc doit répondre à la question suivante :
« Le premier jour, nous vous offrons 100€ puis chaque jour suivant, nous vous offrons 5 % de plus que la veille et une somme fixe de 20€.
Au bout de combien de jours aurez-vous gagné 10000€ » ?

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le montant en euros versé à Marc le $n^{\text{ème}}$ jour.
Ainsi $u_1=100$.

1.a. Calculer u_0 .

1.b. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1}=1{,}05\,u_n+20$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n=u_n+100$

2.a. Calculer v_1 .

2.b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

2.c. Exprimer v_n en fonction de n, puis endéduire que : $u_n=500\times 1{,}05^{n-1}-400$.

2.d. Déterminer en fonction de n, la somme : $v_1+v_2+\ldots+v_n$.

3. Quelle réponse Marc doit-il donner ?

Bac TES novembre 2008 Nouvelle Calédonie

Exercice 3

Partie A

Soit la suite (U_n) définie par la donnée de son premier terme $U_0 = 14000$ et par la relation :
pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1{,}04\,U_n + 200$

1. Calculer U_1 et U_2.

2. Pour tout entier naturel on pose : $V_n = U_n + 5000$.

2.a. Calculer V_0

2.b. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2.c. Exprimer V_n en fonction de n.

2.d. En déduire que $U_n = 19000 \times 1{,}04^n - 5000$.

Partie B

On suppose que U_n représente le salaire annuel en euros d'une personne pour l'année (2002+n), n étant un entier naturel.

1. Calculer le salaire arrondi à l'euro, de la personne en 2010.

2.a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x : $1{,}04^x \geqslant \frac{33}{19}$.

2.b. À partir de quelle année le salaire annuel de cette personne aura-t-il doublé par rapport à celui de 2002 ?

Bac TES septembre 2008 Polynésie

Exercice 4

Une association caritative a constaté que, chaque année,20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que,chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
On étudie l'évolution du nombre de donateurs au fil des années.
Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1000 donateurs.
On note le nombre de donateurs lors de la $n^{\text{ième}}$ année ; on a donc $u_1 = 1000$.

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 300$.

3. Dans un repère orthogonal d'unité graphique 1 cm pour 100 (on prendra l'origine du repère en bas à gauche de la feuille), représenter les droites d'équation y=x et y=0,8x+300.
À l'aide d'une construction graphique, émettre une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

4. Afin de démontrer cette conjecture, on introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$v_n = 1500 - u_n$

4.a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

4.b. Calculer la limite de (v_n) ; en déduire la limite de (u_n).
Que peut-on en déduire pour l'évolution du nombre de donateurs de l'association ?

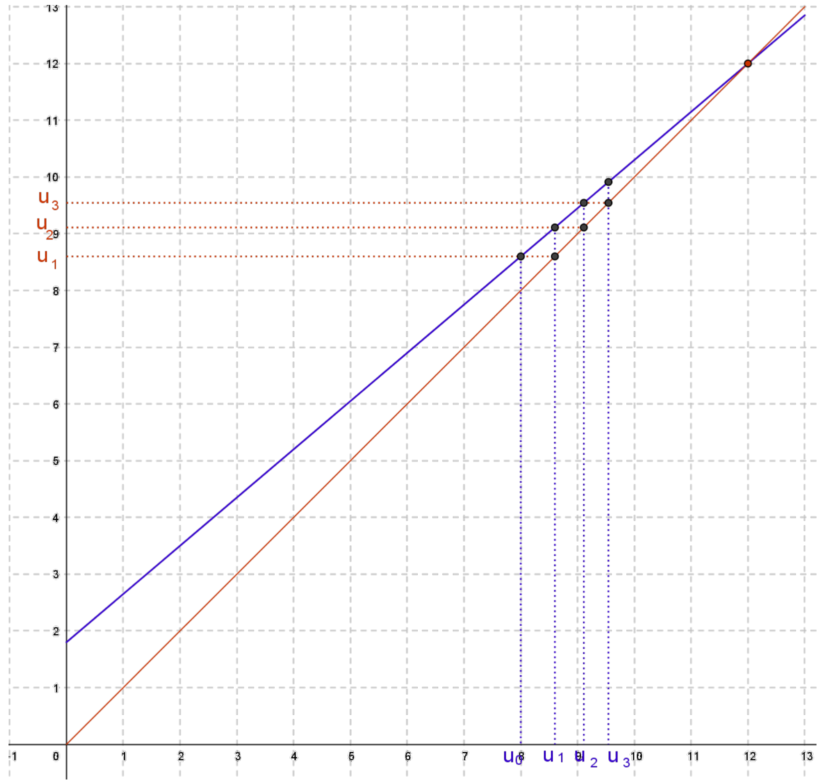
Bac TES septembre 2008 Antilles-Guyane

CORRECTION

Exercice 1

(u_n) est la suite définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=0,85\,u_n+1,8$

1.



Conjecture : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=12$

2. Pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-12$.

2.a. $v_{n+1}=u_{n+1}-12=(0,85\,u_n+1,8)-12=0,85\,u_n-10,2$

On a : $u_n=v_n+12$

$v_{n+1}=0,85(v_n+12)-10,2=0,85\,v_n+0,85\times12-10,2=0,85\,v_n+10,2-10,2$

$v_{n+1}=0,85\,v_n$

$v_0=u_0-12=8-12=-4$

(v_n) **est la suite géométrique de premier terme: -4 et de raison : 0,85.**

2.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0q^n=-4\times(0,85)^n$

$u_n=12+v_n$

$u_n=12-4\times(0,85)^n$

2.c. $0<0,85<1$ et $v_0=-4<0$ donc la suite (v_n) est strictement croissante.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1}>v_n$ donc $v_{n+1}+12>v_n+12$ soit $u_{n+1}>u_n$

(u_n) **est strictement croissante.**

2.d. $0<0,85<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

$u_n=12+v_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=12$

3.a. Soit u_n le nombre d'abonnés, en milliers, au journal en (2008+n).
Pour l'année (2008+n+1) il y a 15 % des abonnés qui ne se réabonnement pas donc 85 % des abonnés se réabonnent, soit $0{,}85\,u_n$ (en milliers).
Il y a 1800 nouveaux abonés soit 1,8 milliers d'abonnés.
Donc $u_{n+1}=0{,}85\,u_n+1{,}8$.
Et il y a 8000 abonnés en 2008 soit 8 milliers, donc $u_0=8$.

3.b. 2014=2008+6 donc n=6.
$u_6=12-4\times 0{,}85^6=10{,}491$ à 10^{-3} près.
Donc le nombre d'abonnés en est estimé à : **10 491.**

Exercice 2

1.a. 5 % de u_1 est égal à $0{,}05\times 100=5$
donc $u_2=u_1+0{,}05\,u_1+20=100+5+20$
u_2 =**125.**

1.b. u_n est le montant en euros versé à Marc le $n^{\text{ième}}$ jour.
$u_{n+1}=u_n+0{,}05\,u_n+20=(1+0{,}05)\,u_n+20$
$u_{n+1}=1{,}05\,u_n+20$.

2. Pour tout entier naturel non nul n : $v_n=u_n+400$ donc $u_n=v_n-400$.
2.a. $v_1=u_1+400=100+400$
v_1 = **500.**

2.b. Pour tout entier naturel non nul n
$v_{n+1}=u_{n+1}+400=(1{,}05\,u_n+20)+400=1{,}05\,u_n+420$
$v_{n+1}=1{,}05(v_n-400)+420=1{,}05\,v_n-1{,}05\times 400+420=1{,}05\,v_n-420+420$
$v_{n+1}=1{,}05\,v_n$
(v_n) **est la suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme** v_1 **=500.**

2.c. Pour tout entier naturel non nul
$v_n=v_1q^{n-1}=500\times 1{,}05^{n-1}$
$u_n=v_n-400$
$u_n=500\times 1{,}05^{n-1}-400$

2.d. $v_1+v_2+\ ...\ +v_n=(\text{premier terme})\times\dfrac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1-(\text{raison})}=500\times\dfrac{1-1{,}05^n}{1-1{,}05}=\dfrac{500}{0{,}05}\times(1{,}05^n-1)$
$v_1+v_2+\ ...\ +v_n=10000\times(1{,}05^n-1)$

3. La somme gagnée par Marc pour n jours est :
$S=u_1+u_2+\ ...\ +u_n=(v_1-400)+(v_2-400)+\ ...\ +(v_n-400)=v_1+v_2+\ ...\ v_n-n\times 400$
$S=10000\times 1{,}05^n-10000-400\,n$
On demande : $S\geqslant 1000$ soit $10000\times 1{,}05^n-20000-400\,n\geqslant 0$

. **Utilisation d'un tableur**
En A1 : 1 en B2 : =10000*1,05^A1-20000-400*A1
En A2 : =A1+1
Puis on étire vers le bas

	A	B
1	1	-9900
2	2	-9775
3	3	-9623,75
4	4	-9444,94
5	5	-9237,18
6	6	-8999,04
7	7	-8729
8	8	-8425,45
9	9	-8086,72
10	10	-7711,05
11	11	-7296,61
12	12	-6841,44
13	13	-6343,51
14	14	-5800,68
15	15	-5210,72
16	16	-4571,25
17	17	-3879,82
18	18	-3133,81
19	19	-2330,5
20	20	-1467,02
21	21	-540,37
22	22	452,61
23		

On obtient n=22.

Marc doit répondre :«Au bout de 22 jours »

- **Utilisation d'un algorithme**

Variables : n est un entier naturel
S et u sont des nombres réels
Initialisation : n=0
S=0
u=100
Traitement : Tant que S < 10000
n=n+1
S=S+u
u=1,05*u+20
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

- **Programmation en utilisant le logiciel Python**

```
print('Début de programme')
n,S,u=0,0,100   # la première valeur de u est 100
while(S<10000):
    n=n+1       # la valeur de n dans la première boucle est 1
    S=S+u       # la valeur de S dans la première boucle est 100
    u=u*1.05+20 # on obtient la deuxième valeur de u
print("Le nomnbre de jours est:"+str(n))
print("Fin de programme")
```

- **On exécute le programme et on obtient**

```
Début de programme
Le nomnbre de jours est:22
Fin de programme
>>>
```

Marc doit répondre : « Au bout de 22 jours »

Exercice 3

Partie A

(u_n) est la suite définie par $u_0=14000$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=1{,}04\times u_n+200$.

1. $u_1=14000\times 1{,}04+200=14560+200$

u_1 = **14760.**

$u_2=14760\times 1{,}04+200=15350{,}4+200$

u_2 = **15550,4**

2. Pour tout entier naturel n :

$v_n=u_n+5000$ donc $u_n=v_n-5000$

2.a. $v_0=u_0+5000=14000+5000$ = **19000.**

2.b. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}+5000=1{,}04\,u_n+200+5000=1{,}04\,u_n+5200$

$v_{n+1}=1{,}04\,(v_n-5000)+5200=1{,}04\,u_n-5200+5200$

$v_{n+1}=1{,}04\,v_n$

(v_n) **est la suite géométrique de raison:1,04 et de premier terme** v_0 **= 19000.**

2.c. $v_n=v_0 q^n=19000\times 1{,}04^n$

$u_n=v_n-5000$

$u_n=19000\times 1{,}04^n-5000$

Partie B

1. 2010=2002+8 donc n=8

$u_8=19000\times 1{,}0^8-5000=21003$ à l'unité près

u_8 = **21003 €**

2.a. $1{,}04^x \geqslant \dfrac{33}{19} \Leftrightarrow e^{x\ln(1{,}04)} \geqslant \dfrac{33}{19} \Leftrightarrow x\ln(1{,}04) \geqslant \ln\left(\dfrac{33}{19}\right)$

1,04 > 1 donc ln(1,04) > 0

$\Leftrightarrow \quad x \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{33}{19}\right)}{\ln(1{,}04)}=A=14{,}08$ à 10^{-2} près

$S=[A;+\infty[$

2.b. $u_n \geqslant 2u_0=28000$

$19000\times 1{,}04^n \geqslant 33000 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}04^n \geqslant \dfrac{33000}{19000}=\dfrac{33}{19}$

Donc $n \geqslant 14{,}08$ or n est un entier naturel et $n \geqslant 15$.

Le salaire aura doublé à partir de 2002+15=2017.

Remarque

(u_n) est la suite définie par $u_0=14000$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}04\,u_n+200$.

Pour tout entier naturel n, u_n représente le salaire annuel en euros d'une personne pour l'année 2002+n.

À partir de quelle année le salaire annuel de cette personne sera-t-il doublé par rapport à celui de 2002 ?

. **Algorithme**

Variables :	n est un entier naturel u est un nombre réel
Initialisation :	n = 2012 u = 14000
Traitement :	Tant que u < 28000 n = n+1 u = 1,04u+200 Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

. Programmation en Python

```python
print('Début de progamme')
n,u=2012,14000
while(u<28000):
     n=n+1
     u=u*1.04+200
print("L'année demandée est:"+str(n))
print('Fin de programme')
```

. On exécute et on obtient

```
Début de progamme
L'année demandée est:2027
Fin de programme
>>>
```

Exercice 4

1. $u_1 = 1000$

Il y a 20 % des donateurs qui ne renouvellent pas leur don donc 80 % des donateurs renouvellent leur don soit : $0,8 \times 1000 = 800$.

Et il y a 300 nouveaux donateurs.

$u_2 = 800 + 300 =$ **1100.**

. u_n $u_2 = 1100$

Il y a 20 % des donateurs qui ne renouvellent pas leur don donc 80 % des donateurs renouvellent leur don soit : $0,8 \times 1100 = 880$.

Et il y a 300 nouveaux donateurs.

$u_3 = 880 + 300 =$ **1180.**

2. u_n est le nombre de donateurs de la $n^{\text{ième}}$ année.

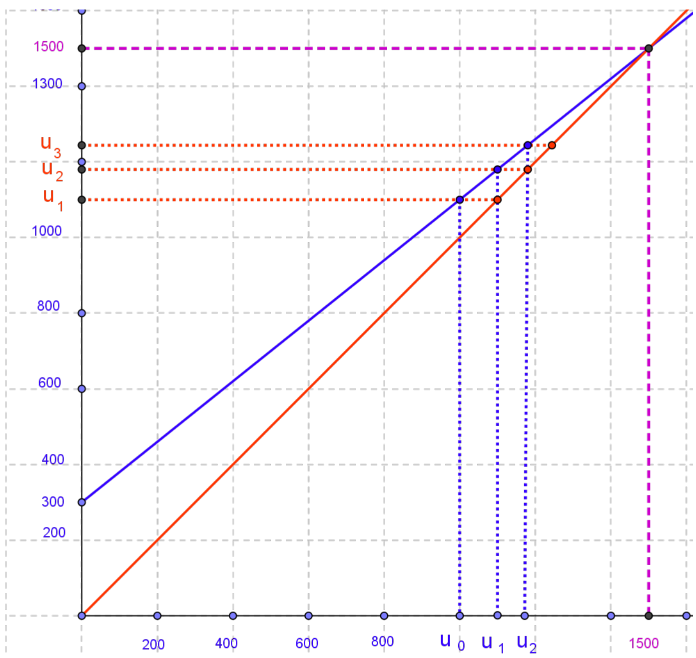
Pour la $(n+1)^{\text{ième}}$:

il y a 20 % des donateurs qui ne renouvellent pas leur don donc 80 % des donateurs renouvellent leur don soit : $0,8\,u_n$.

Et il y a 300 nouveaux donateurs.

$u_{n+1} = 0,8\,u_n + 300$.

3.



<u>Conjecture</u> $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1500$

4. Pour tout entier naturel n :

$v_n = 1500 - u_n$ donc $u_n = 1500 - v_n$

4.a. $v_{n+1} = 1500 - u_{n+1} = 1500 - (0{,}8\,u_n + 300) = 1200 - 0{,}8\,u_n$

$v_{n+1} = 1200 - 0{,}8 \times (1500 - v_n) = 1200 - 0{,}8 \times 1500 + 0{,}8\,v_n = 1200 - 1200 + 0{,}8\,v_n$

$v_{n+1} = 0{,}8\,v_n$

$v_0 = 1500 - u_0 = 1500 - 1000 = 500$

(v_n) **est la suite géométrique de raison : 0,8 et de premier terme $v_0 = 500$.**

4.b. $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0{,}8^n$

$0 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

$u_n = 1500 - v_n$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1500$.

Dans un futur lointain le nombre de donateurs sera voisin de 1500.