Fiche Exercices 3

Exercice 1

Dans une société, le service informatique utilise deux logiciels de gestion : d'une part, le logiciel Aurora, leader du marché, est d'autre part le logiciel bestmath, son concurrent. Le chef du réseau informatique enregistre chaque année,en janvier et en juillet , le nombre d'utilisateurs des deux logiciel et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.
Lors de l'enquête de janvier 2009, le chef de réseau a constaté que 32 % des informaticiens utilisaient le logiciel Aurora, les autres utilisaient informaticiens utilisaient le logiciel Bestmath.
Lors de chaque relevé suivant (juillet 2009, janvier 2010, …), le chef du réseau informatique a constaté que 20 % des utilisateurs du logiciel Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais le logiciel Bestmath, tandis que 25 % des utilisateurs du logiciel Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.
Les semestres sont comptés à partir de janvier 2009, que l'on appellera semestre 0 (juillet 2009 est donc le semestre 1).
Pour tout entier naturel n, on désigne par :
. a_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora le semestre n ;
. b_n la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Bestmath le semestre n.

1.a. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
1.b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2.a. On note $P_0=\begin{pmatrix}a_0 & b_0\end{pmatrix}$ l'état initial de ce graphe en janvier 2009. Déterminer P_0 .
2.b. On appelle P_1 l'état de la société en juillet 2009. vérifier que $P_1=\begin{pmatrix}0,426 & 0,574\end{pmatrix}$.
2.c. On appelle P_2 l'état en janvier 2010. Déterminer P_{10} (les résultats seront arrondis à 10^{-3} près).

3. Dans cette partie on étudie la suite (a_n) .
3.a. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1}=0,55a_n+0,25$.
3.b. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n, par : $U_n=\frac{5}{9}-a_n$.
Démontrer que la suite (U_n) est géométrique, déterminer sa raison ainsi que le premier terme.
3.c. En déduire l'expression de U puis de a_n en fonction de n.

4. Soit $P=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ l'état probabiliste stable.
4.a. Déterminer x et y.
4.b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On suppose que l'utilisation du logiciel Aurora dans l'entreprise progresse régulièrement de la même façon. Le distributeur du logiciel Aurora peut-il espérer que son logiciel soit utilisé un jour par plus de 60 % des informaticiens de l'entreprise ?

Bac TES juin 2010 Polynésie

Exercice 2

Pendant ses vacances d'été, Alex a la possibilité d'aller se baigner tous les jours. S'il va se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,7.
S'il ne va pas se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,9.
Le premier jour des vacances, Alex va se baigner
n étant un entier naturel non nul, on note :

. a_n la probabilité qu'Ales n'aille pas se baigner le $n^{\text{ième}}$ jour.
. b_n la probabilité qu'Alex aille se baigner le $n^{\text{ième}}$ jour.
. $P_n=(a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le $n^{\text{ième}}$ jour.
On a donc $P_1=(0 \quad 1)$.

1.a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (B représentant l'état « Alex va se baigner »).
1.b. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.
Recopier et compléter $M=\begin{pmatrix} 0,1 & \dots \\ \dots & 0,7 \end{pmatrix}$
2. Calculer P_3, P_{10} et P_{20} .Quelle conjecture peut-on faire ?

3.a. Montrer que pour tout entier n non nul, $b_{n+1}=0,9\,a_n+0,7\,b_n$.
3.b. En déduire que : $b_{n+1}=-0,2\,b_n+0,9$.

4. On considère la suite u définie pour tout entier naturel non nul par $u_n=b_n-0,75$.
4.a. Montrer que u est une suite géométrique de raison -0,2 ; on précisera son premier terme.
4.b. Déterminer la limite de la suite u.
4.c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
5. On suppose dans cette question que lpremier jour de ses vacances, Alex ne va pas se baigner.
Quelle est la probabilité qu'il aille se baigner le $20^{\text{ième}}$ jour de ses vacances ?

Bac TES juin 2010 Amérique du Nord

Exercice 3
Deux chaînes de télévision A et B programme chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes.
On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant.
La première semaine 70 % de ces téléspectateurs ont regardé la chaîne A.
Une étude statistique montre que :
15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.
10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante.
On note respectivement a_n et b_n les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la $n^{\text{ième}}$ semaine et P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. On a donc $P_1=(0,7 \quad 0,3)$.

1.a. Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.
1.b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

2. Calculer M^3 à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à 10^{-3} près.
Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes lors de la quatrième semaine ?

3. On considère la matrice ligne $P=(a \quad b)$, où a et b sont deux réels tels que a+b=1.
3.a. Déterminer a et b pour que $P=PM$.
3.b. Interpréter les deux valeurs trouvées.

4. On admet que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $a_n=0,4+0,3\times0,75^{n-1}$.
4.a. Résoudre l'inéquation : $a_n < 0,5$.
4.b. À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission A ?

Bac TES juin 2010 Liban

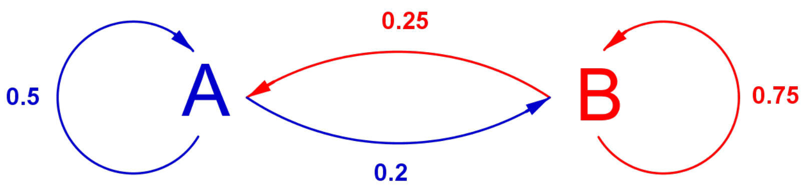
CORRECTION

Exercice 1

1.a. On note :

A l'état « l'informaticien utilise le logiciel Aurora »
B l'état « l'informaticien utilise le logiciel Bestmath »
A et B sont les sommets de l'arbre probabiliste.

- Lors de chaque relevé, 20 % des utilisateurs du logiciel Aurora changent de logiciel (pour utiliser le logiciel Bestmath) donc 80 % conservent le logiciel Aurora.
  Conséquences
  Le poids de l'arête AB est 0,2.
  Le poids de l'arête AA est 0,8
- Lors de chaque relevé, 25 % des utilisateurs du logiciel Bestmath changent de logiciel (pour utiliser le logiciel Aurora) donc 75 % conservent le logiciel Bestmath.
  Conséquences
  Le poids de l'arête BA est 0,25
  Le poids de l'arête BB est 0,75
- On obtient pour graphe probabiliste :



1.b. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique et on utilise les matrices lignes.
M est la matrice de transition du graphe probabiliste

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

m_{11} = le poids de l'arête AA = 0,8
m_{12} = le poids de l'arête AB = 0,2
m_{21} = le poids de l'arête BA = 0,25
m_{22} = le poids de l'arête BB = 0,75

$$M=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

2.a. En janvier 2009, il y a 32 % des informaticiens qui ont choisi le logiciel Aurora donc 68 % ont choisi le logiciel Bestmath.

$a_0=0,32$ et $b_0=0,68$ donc $P_0=\begin{pmatrix} 0,32 & 0,68 \end{pmatrix}$

2.b. $P_1=P_0 M$

$$P_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

$a_1=0,8\,a_0+0,25\,b_0=0,8\times 0,32+0,25\times 0,68=0,426$
$b_1=0,2\,a_0+0,75\,b_0=0,2\times 0,32+0,75\times 0,68=0,574$
$P_1=\begin{pmatrix} 0,426 & 0,574 \end{pmatrix}$

2.c. $P_2=P_1 M$

$P_2 = (a_2 \quad b_2) = (a_1 \quad b_1)\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$

$a_2 = 0,8\,a_1 + 0,25\,b_1 = 0,8 \times 0,426 + 0,25 \times 0,574 = 0,484$ à 10^{-3} près.

$b_2 = 0,2\,a_1 + 0,75\,b_1 = 0,2 \times 0,426 + 0,75 \times 0,574 = 0,516$ à 10^{-3} près.

$P_2 = (0,484 \quad 0,516)$

3.a. $P_{n+1} = P_n M$

$(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$

$a_{n+1} = 0,8\,a_n + 0,25\,b_n$ or $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$

$a_{n+1} = 0,8\,a_n + 0,25(1 - a_n) = 0,8\,a_n - 0,25\,a_n + 0,25$

$a_{n+1} = 0,55\,a_n + 0,25$.

3.b. Pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{5}{9} - a_n$ donc $a_n = \frac{5}{9} - u_n$

$u_{n+1} = \frac{5}{9} - a_{n+1} = \frac{5}{9} - (0,55\,a_n + 0,25) = \frac{5}{9} - 0,25 - 0,55\,a_n$

$u_{n+1} = \frac{5}{9} - 0,25 - 0,55\left(\frac{5}{9} - u_n\right) = \frac{5}{9} - 0,25 - 0,55 \times \frac{5}{9} + 0,55\,u_n$

$u_{n+1} = 0,45 \times \frac{5}{9} - 0,25 + 0,55\,u_n = 0,05 \times 5 - 0,25 + 0,55\,u_n = 0,25 - 0,25 + 0,55\,u_n$

$u_{n+1} = 0,55\,u_n$

$u_0 = \frac{5}{9} - a_0 = \frac{5}{9} - 0,32 = \frac{5}{9} - \frac{32}{100} = \frac{5}{9} - \frac{8}{25} = \frac{125 - 72}{225} = \frac{53}{225}$

(u_n) **est la suite géométrique de raison 0,55 et de premier terme $\frac{53}{225}$.**

3.c. $u_n = u_0 \times q^n = \frac{53}{225} \times 0,55^n$

$a_n = \frac{5}{9} - u_n$

$a_n = \frac{5}{9} - \frac{53}{225} \times 0,55^n$

4.a. $P = (x \quad y)$ est l'état probabiliste stable $\Leftrightarrow \begin{cases} P = PM \\ x + y = 1 \end{cases}$

$P = PM \Leftrightarrow (x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,8\,x + 0,25\,y \\ y = 0,2\,x + 0,75\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2\,x - 0,25\,y = 0 \\ 0,2\,x - 0,25\,y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{20\,x - 25\,y = 0 \Leftrightarrow \{4\,x - 5\,y = 0$

Or $y = 1 - x$ donc $4\,x - 5(1 - y) = 0 \Leftrightarrow 9\,x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{9}$ et $y = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

$P = \left(\frac{5}{9} \quad \frac{4}{9}\right)$ **est l'état probabiliste stable.**

4.b. (u_n) est la suite géométrique de raison q=0,55 ($0 < q < 1$) et de premier terme $\frac{53}{225} > 0$ donc (u_n) est une suite décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Pour tout entiet naturel n : $u_n = \frac{5}{9} - a_n$ donc $a_n = \frac{5}{9} - u_n$.

$u_{n+1} < u_n$ donc $-u_{n+1} > -u_n$ et $\frac{5}{9}-u_{n+1} > \frac{5}{9}-u_n$ soit $a_{n+1} > a_n$.

(a_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\frac{5}{9}$ donc $a_n \leqslant \frac{5}{9}=0{,}56$ à 10^{-2} près.

<u>Conséquence :</u>

Pour tout entier naturel n $a_n < 0{,}6$ et le distributeur du logiciel Aurora ne peut pas espérer que son logiciel soit utilisé un jour par plus de 60 % des informaticiens de l'entreprise.

Exercice 2

1.a. On note :

A l'état « Alex ne va pas se baigner »

B l'état « Alex va se baigner »

A et B sont les deux sommets de l'axe probabiliste.

- Si Alex va se baigner un jour la pzobabilité qu'il aille se baigner le lendemain est:0,7, donc la probabilité qu'il n'aille pas se baigner le lendemain est $1-0{,}7=0{,}3$.

  <u>Conséquences :</u>

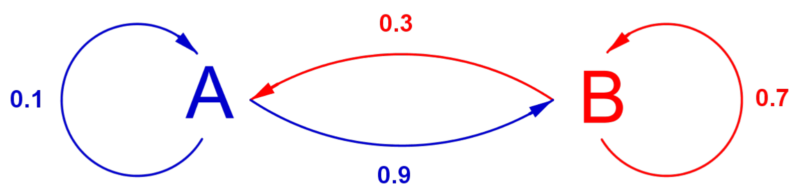
  Le poids de l'arête BB est: 0,7

  Le poids de l'arête BA est : 0,3
- Si Alex ne va pas se baigner un jour la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est : 0,9, donc la probabilité qu'il n'aille pas se baigner le lendemain est : 1*0,9=0,1.

  <u>Conséquences :</u>

  Le poids de l'arête AB est : 0,9

  Le poids de l'arête AA est : 0,1
- On obtient pour graphe probabiliste :



1.b. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique et on utilise les matrices lignes.

La matrice de transition du graphe est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,1

m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,9

m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,3

m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,7

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

2. $P_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix}$

Le premier jour Alex va se baigner.

$a_1=0$ et $b_1=1$ $\quad P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_2=P_1 M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

$P_3=P_2 M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3\times0{,}1 + 0{,}7\times0{,}3 & 0{,}3\times0{,}9 + 0{,}7\times0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel, non nul, n :

$P_n = P_1 M^{n-1}$ donc $P_{10} = P_1 M^9$ et $P_{20} = P_1 M^{19}$.
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$M^9 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$ donc $P_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$
$M^{19} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$ donc $P_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$
Conjecture :
$P = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$ **est l'état stable du graphe probabiliste.**

Remarque
On peut utiliser un tableur pour répondre à la question, on peut alors anticiper la question suivante.
Pour tout entier naturel non nul, n : $P_{n+1} = P_n M$
$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}1\, a_n + 0{,}3\, b_n \\ b_{n+1} = 0{,}9\, a_n + 0{,}7\, b_n \end{cases}$
On écrit :
En A1 : 1 En B1 : 0 En C1 : 1
En A2 : A1+1 En B2 : =0,1*B1+0,7*C1 En C2 : =0,9*B1+0,7*C1
Puis on étire jusque A20, B20 et C20.

	A	B	C
1	1	0	1
2	2	0.3	0.7
3	3	0.24	0.76
4	4	0.252	0.748
5	5	0.2496	0.7504
6	6	0.25008	0.74992
7	7	0.24998	0.75002
8	8	0.25	0.75
9	9	0.25	0.75
10	10	0.25	0.75
11	11	0.25	0.75
12	12	0.25	0.75
13	13	0.25	0.75
14	14	0.25	0.75
15	15	0.25	0.75
16	16	0.25	0.75
17	17	0.25	0.75
18	18	0.25	0.75
19	19	0.25	0.75
20	20	0.25	0.75
21			

3.a. Nous avons déjà démontré que pour tout entier naturel non nul :
$b_{n+1} = 0{,}9\, a_n + 0{,}7\, b_n$.

3.b. Pour tout entier naturel non nul, on a $a_n + b_n = 1$ donc $a_n = 1 - b_n$.
$b_{n+1} = 0{,}9(1 - b_n) + 0{,}7\, b_n = 0{,}9 - 0{,}9\, b_n + 0{,}7\, b_n = 0{,}9 - 0{,}2\, b_n$.

4. Pour tout entier naturel non nul : $u_n = b_n - 0{,}75$ donc $b_n = u_n + 0{,}75$

4.a. $u_{n+1} = b_{n+1} - 0{,}75 = 0{,}9 - 0{,}2\,b_n - 0{,}75 = 0{,}15 - 0{,}2(u_n + 0{,}75) = 0{,}15 - 0{,}2\,u_n - 0{,}2 \times 0{,}75$

$u_{n+1} = 0{,}2\,u_n$.

$u_1 = b_1 - 0{,}75 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

(u_n) **est la suite géométrique q = -0,2 et de premier terme u_1 = 0,25.**

4.b. -1 < -0,2 < 0 donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4.c. $b_n = u_n + 0{,}75$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0{,}75$.

5. L'état stable P est indépendant de l'état initial P_1 .

Que l'on ait $P_1 = (0 \quad 1)$ ou $P_1 = (1 \quad 0)$ on a $P = (0{,}25 \quad 0{,}75)$.

$P_{20} = P$

La probabilité qu'Alex aille se baigner le $20^{\text{ième}}$ jour est : 0,75.

Exercice 3

1.a. On note :

A l'état « le téléspectateur regarde la chaîne A »

B l'état « le téléspectateur regarde la chaîne B »

A et B sont les deux sommets du graphe probabiliste

- 15 % des téléspectateurs qui regardent la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante donc 85 % des téléspectateurs qui regardent la chaîne A une semaine regardent la chaîne A la semaine suivante.

  Conséquences :

  Le poids de l'arête AB est : 0,15

  Le poids de l'arête AA est : 0,85

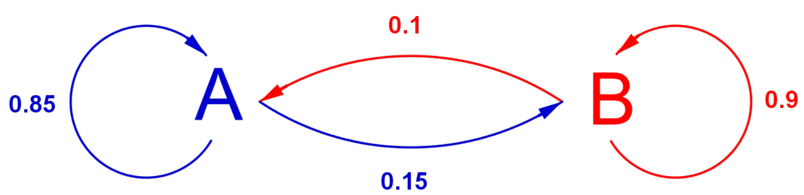
- 10 % des téléspectateurs qui regardent la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante donc 90 % des téléspectateurs qui regardent la chaîne B une semaine regardent la chaîne B la semaine suivante.

  Conséquences :

  Le poids de l'arête BA est : 0,1

  Le poids de l'arête BB est : 0,9

- On obtient le gaphe probabiliste suivant :



1.b. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique et dans cet exercice , on utilise les matrices lignes.

La matrice de transition du graphe est $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA soit : 0,85

m_{12} est le poids de l'arête AB soit : 0,15

m_{21} est le poids de l'arête BA soit : 0,1

m_{22} est le poids de l'arête BB soit : 0,9

$M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

2. On utilise la calculatrice pour trouver M^3 (on arrondit les coefficients à 10^{-3} près).

$$M=\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}15\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}\qquad M^2=\begin{pmatrix}0{,}737 & 0{,}263\\ 0{,}175 & 0{,}825\end{pmatrix}\qquad M^3=\begin{pmatrix}0{,}653 & 0{,}347\\ 0{,}231 & 0{,}769\end{pmatrix}$$

On a $P_1=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$

$$P_4=P_1M^3=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}653 & 0{,}347\\ 0{,}231 & 0{,}474\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_4 & b_4\end{pmatrix}$$

$a_4=0{,}7\times0{,}653+0{,}3\times0{,}231=0{,}526$ à 10^{-3} près

$b_4=0{,}7\times0{,}347+0{,}3\times0{,}769=0{,},474$ à 10^{-3} près

$P_4=\begin{pmatrix}0{,}526 & 0{,}474\end{pmatrix}$

52,6 % des téléspectateurs regardent la chaîne A la quatrième semaine.
47,7 % des téléspectateurs regardent la chaîne B la quatrième semaine.

3.a. $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$

$$P=PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}15\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0{,}85a+0{,}1b\\ b=0{,}15a+0{,}9b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0{,}15a-0{,}1b=0\\ 0{,}15a-0{,}1b=0\end{cases}$$

$\{0{,}15a-0{,}1b=0$ Or $a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$.

$$0{,}15a-0{,}1(1-a)=0 \Leftrightarrow 0{,}25a-0{,}1=0 \Leftrightarrow a=\frac{0{,}1}{0{,}25}=0{,}4 \text{ et } b=1-0{,}4=0{,}6$$

$P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$

3.b. L'état stable du système est $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$.

Dans le futur les audiences des chaînes A et B seront voisines respectivement de 40 % et 60 %.

4. Pour tout entier naturel non nul n on a : $a_n=0{,}4+0{,}3\times0{,}75^{n-1}$.

4.a. Résoudre : $a_n < 0{,}5$.

$$a_n < 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}4+0{,}3\times0{,}75^{n-1} < 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}3\times0{,}75^{n-1} < 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}75^{n-1} < \frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3}$$

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$$\ln\left(0{,}75^{n-1}\right) < \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow (n-1)\ln(0{,}75) < \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow (n-1)\ln(0{,}75) < -\ln(3)$$

$0<0{,}75<1$ donc $\ln(0{,}75)<0$

$$\Leftrightarrow n-1 > \frac{-\ln(3)}{\ln(0{,}75)} \Leftrightarrow n > 1+\frac{-\ln(3)}{\ln(0{,}75)}=4{,}82 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Donc $n \geqslant 5$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $a_n < 5$ est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à5.

4.b. En semaine 5, $a_5 < 0{,}5$ donc moins de 50 % des téléspectateurs regardent la chaîne A.

Donc à partir de la semaine 5, l'audience de la chaîne B dépassera l'audience de la chaîne A.

Remarque

(a_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $a_n=0{,}4+0{,}3\times0{,}75^{n-1}$.
On veut déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que : $a_n < 5$.

. Utilisation d'un tableur

En A1 : 1 En B1 : 0,7
En A2 : =A1+1 En B2 : =0,4+0,3*0,75^{n-1}

Puis on étire :

	A	B
1	1	0,7
2	2	0,625
3	3	0,56875
4	4	0,5265625
5	5	0,494921875
6		

On obtient : n=5

. **Utilisation d'un algorithme**

Variables : n est un entier naturel
a est un nombre réel
Initialisation : n=1
a=0,7
Traitement : Tant que $0,5 \leqslant a$
$a = 0,4 + 0,3 \times 0,75^n$
n=n+1
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

. **Programmation en Python**

```
print('Début de programme')
n,a=1,0.7
while(0.5<=a):
    a=0.75**n*0.3+0.4
    n=n+1
print("n="+str(n))
print('fin de programme')
```

. **On exécute le programme et on obtient**

```
Début de programme
n=5
fin de programme
>>>
```