Fiche Exercices 4

Exercice 1

Par suite d'une forte augmentation du prix des carburants de 2007 à 2008, certains salariés d'une entreprise changent de mode de déplacement pour se rendre sur leur lien de travail.
En 2007, 60 % des salariés utilisaient leur voiture personnelle.
En 2008, 30 % des salariés utilisant leur voiture en 2007 ne l'utilise plus et 5 % des personnes ne l'utilisant pas en 2007 l'utilisent en 2008.
On appelle les états suivants :
A l'état : « la personne utilise sa voiture » ;
B l'état : « la personne n'utilise pas sa voiture ».
On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2008 et on appelle, pour tout entier naturel n, P_n , la matrice ligne donnant l'état probabiliste des moyens de déplacement des salariés au cours de l'année (2007+n).
On pose $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ et on a $P_0=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.

1. Tracer un graphe probabiliste représentant la situation décrite ci-dessus.

2. Donner la matrice de transition correspondant à ce graphe probabiliste en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

3. En supposant que cette évolution se poursuivre et en utilisant la question précédente, quelle est la probabilité qu'un salarié de cette entreprise utilise sa voiture personnelle en 2009 ? En 2010 ?
(On arrondira les résultats obtenus au centième).

4.a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a la relation : $a_{n+1}=0,7a_n+0,05b_n$.
En déduire que $a_{n+1}=0,65a_n+0,05$.

4.b. On admet que a_n peut s'écrire pour tout entier naturel n, $a_n=\frac{1}{7}+\frac{16}{35}\times 0,65^n$.
Vérifier la validité de cette formule pour a_0 , a_1 et a_2 .

5.a. Déterminer la limite de la suite (a_n) .

5.b. En supposant que cette évolution se poursuivre, est-il possible d'envisager qu'à terme aucun des salariés de cette entreprise n'utilise sa voiture personnelle pour aller au travail ?
Justifier la réponse.

Bac TES novembre 2009 Nouvelle Calédonie

Exercice 2

On considère une population donnée d'une île de Bretagne se rendant régulièrement sur le continent.
Deux compagnies maritimes A et B effectuent la traversée.
En 2008 60 % de la population voyage avec la compagnie A. Les campagnes publicitaires font évoluer cette répartition. Une enquête indique alors que chaque année 20 % des clients de la compagnie A l'abandonnent au profit de la compagnie B et que 10 % des clients de la compagnie B choisissent la compagnie A.
Pour Tout entier naturel n, l'état probabiliste de l'année 2008+n est défini par la matrice ligne $\begin{pmatrix}x_n & y_n\end{pmatrix}$ où x_n désigne la proportion de la population qui voyage avec la compagnie A et y_n la proportion de la population qui voyage avec la compagnie B.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.

3. Préciser l'état initial P_0 puis montrer que $P_1=\begin{pmatrix}0{,}52 & 0{,}48\end{pmatrix}$.

4. Déterminer la répartition prévisible du trafic entre les compagnie A et B en 2011.

5. Déterminer l'état stable et l'interpréter.

6. Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1}=0{,}7x_n+0{,}1$.

7. On admet que, pour tout entier naturel n, $x_n=\frac{4}{15}\times 0{,}7^n+\frac{1}{3}$.

Déterminer la limite de la suite (x_n) et l'interpréter.

Bac TES septembre 2009 Polynésie

Exercice 3

Chaque mois un institut de sondage donne la cote de popularité d'un même groupe politique dans l'opinion publique. Les personnes sondées sont, soit favorables, soit défavorables à ce groupe. Initialement, il y a autant de personnes favorables à ce groupe politique que de personnes qui lui sont défavorables.
De chaque mois au mois suivant, on considère que :
. 10 % des personnes qui étaient favorables à ce groupe politique ne le sont plus.
. 15 % des personnes qui n'étaient pas favorables à ce groupe le deviennent.
On note, pour tout entier naturel n :
. a_n la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois soit favorable à ce groupe politique.
. b_n la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois ne soit pas favorable à ce groupe politique.
. $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste au bout de n mois.
On note M la matrice de transition telle que, pour tout entier naturel n : $P_{n+1}=P_n\times M$.

Première Partie

1. Déterminer la matrice P_0 donnant l'état probabiliste initial.
2. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à la situation.
3. On admet que $M=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}15 & 0{,}85\end{pmatrix}$.

Déterminer P_2 en détaillant les calculs.
(On donnera les coefficients sous forme décimale arrondie au centième).
4. On déterminera l'état stable et interpréter le résultat.

Deuxième partie

1. Montrer que $a_{n+1}=0{,}75a_n+0{,}15$ pour tout entier naturel n.
2. On considère la suite (u_n) telle que $a_n-0{,}6$ pour tout entier naturel n.
2.a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,75.
2.b. En déduire que $a_n=-0{,}1\times 0{,}75^n+0{,}6$ pour tout entier naturel n.
2.c. Calculer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.
Comment peut-on interpréter cette limite ?
En quoi ce résultat est-il cohérent avec celui demandé à la question 4 de la première partie.

Bac TES juin 2009 Centres Étrangers

CORRECTION

1. Il y a deux états : A et B

A : l'état « la personne utilise sa voiture personnelle ».

B : l'état « la personne n'utilise pas sa voiture personnelle ».

A et B sont les deux sommets du graphe probabiliste.

. 30 % des salariés utilisant leur voiture personnelle une année, ne l'utilisent plus l'année suivante donc 70 % des salariés utilisant leur voiture personnelle une année, l'utilisent l'année suivante.

<u>Conséquences</u>

Le poids de l'arête AB est : 0,3

Le poids de l'arête AA est : 0,7

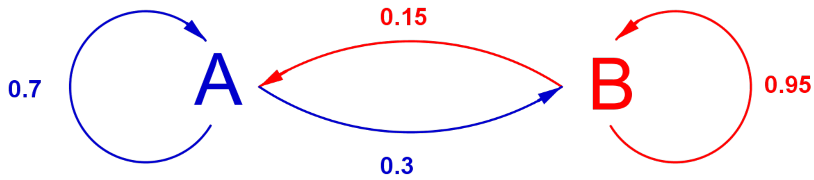
. 5 % des salariés n'utilisant pas leur voiture personnelle une année, lutilisent l'année suivante donc 95 % des salariés n'utilisant pas leur voiture personnelle une année, ne l'utilise pas l'année suivante.

<u>Conséquences</u>

Le poids de l'arête BA est : 0,05.

Le poids de l'arête BB est : 0,95.

. On obtient le graphe probabiliste suivant.



2. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique et on utilise les matrices lignes donc la matrice de transition associée à ce graphe est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA: 0,7

m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,3

m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,05

m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,95

$M=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

3. En 2007 : 60 % des salariés utilisaient leur voiture personnelle donc 40 % des salariés n'utilisaient pas leur voiture personnelle et $a_0=0{,}6$, $b_0=0{,}4$ et $P_0=(0{,}6 \quad 0{,}4)$.

$P_1=P_0M$; $P_2=P_0M^2=P_1M$; $P_3=P_0M^3=P_2M$

On peut calculer M^2 et M^3 en utilisant la calculette ou on peut calculer successivement P_1 ; P_2 et P_3 .

$P_0=(a_0 \quad b_0) = (0{,}6 \quad 0{,}4)$

$P_1=(a_1 \quad b_1) = P_0M = (0{,}6 \quad 0{,}4)\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = (0{,}7\times0{,}6 + 0{,}4\times0{,}05 \quad 0{,}3\times0{,}6 + 0{,}95\times0{,}4)$

$P_1=(0{,}44 \quad 0{,}56)$

$P_2=(a_2 \quad b_2) = P_1M = (0{,}44 \quad 0{,}56)\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = (0{,}44\times0{,}7 + 0{,}56\times0{,}05 \quad 0{,}44\times0{,}3 + 0{,}56\times0{,}95)$

$P_2=(0{,}336 \quad 0{,}664)$ en arrondissant $P_2=(0{,}34 \quad 0{,}66)$

En 2007+2=2009 : 34 % des salariés utiliseront leur voiture personnelle.

$P_3=(a_3 \quad b_3) = P_2M = (0{,}34 \quad 0{,}66)\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = (0{,}34\times0{,}7 + 0{,}66\times0{,}05 \quad 0{,}34\times0{,}3 + 0{,}66\times0{,}95)$

En arrondissant $P_3=(0{,}27 \quad 0{,}73)$

En 2007+3= 2010 27 % des salariés utiliseront leur voiture personnelle.

4.a. Pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1}=(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = P_n M = (a_n \quad b_n)\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}05 & 0{,}95\end{pmatrix}$$

donc $a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}3b_n$

or $a_n+b_n=1$ soit $b_n=1-a_n$

$a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}05(1-b_n)=0{,}7a_n+0{,}05-0{,}05a_n$

$a_{n+1}=0{,}65a_n+0{,}05$

4.b. Pour tout entier naturel n : $a_n=\frac{1}{7}+\frac{16}{35}\times 0{,}65^n$.

$a_0=0{,}6 \qquad \frac{1}{7}+\frac{16}{35}\times 0{,}65^0=\frac{5+16}{35}=\frac{\frac{21}{33}}{5}=0{,}6$

La formule est vérifiée pour n=0.

$a_1=0{,}44 \qquad \frac{1}{7}+\frac{16}{35}\times 0{,}65=\frac{1}{7}+\frac{16\times 0{,}13}{7}=\frac{1+2{,}08}{7}=\frac{3{,}08}{7}=0{,}44$

La formule est vérifiée pour n=1.

$a_2=0{,}34 \qquad \frac{1}{7}+\frac{16}{35}\times 0{,}65^2=\frac{1}{7}+\frac{16\times 0{,}65\times 0{,}13}{7}=\frac{2{,}352}{7}=0{,}336=0{,}34$ à 10^{-2} près.

La formule est vérifiée pour n=2.

5.a. $a_n=\frac{1}{7}+u_n$ avec $u_n=\frac{16}{35}\times 0{,}65^n$

(u_n) est la suite géométrique de raison q=0,65 et de premier terme $u_2=\frac{16}{35}$.

o < 0,65 < 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

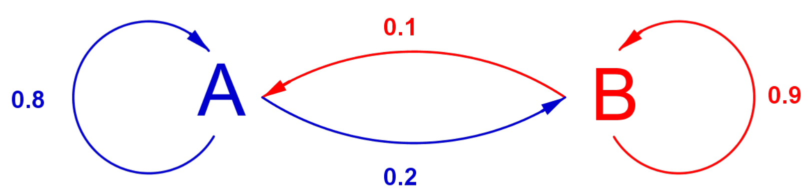
$a_n=\frac{1}{7}+u_n \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\frac{1}{7}=0{,}14$ à 10^{-2} près.

5.b. À long terme au moins 14 % des salariés utiliseront leur voiture personnelle.
Donc il n'est pas envisageable qu'aucun salarié n'utilise sa voiture personne.

Exercice 2

1. Il, y a 2 états : A et B.
A : l'état « le client voyage avec la compagnie A ».
B : l'état « le client voyage avec la compagnie B ».
A et B sont les sommets du graphe probabiliste.

- 20 % des clients de la compagnie A une année, l'abandonnent pour la compagnie B l'année suivante donc 80 % des clients de la compagnie A une année, la conservent l'année suivante.
  <u>Conséquences</u>
  Le poids de l'arête AB est : 0,2.
  Le poids de l'arête AA est : 0,8
- 10 % des clients de la compagnie B une année, l'abandonnent pour la compagnie A l'année suivante donc 90 % des clients de la compagnie B une année, la conservent l'année suivante.
  <u>Conséquences</u>
  Le poids de l'arête BA est : 0,1
  Le poids de l'arête BB est : 0,9
- On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique et on utilise les matrices lignes donc la matrice de transition est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,8
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,2
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,1
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,9

$M=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

3. En 2008 : 60 % de la population voyagent avec la compagnie A donc 40 % de la population voyagent avec la compagnie B.

Donc $P_0=(0{,}6 \quad 0{,}4)$

$P_1=P_0M = (0{,}6 \quad 0{,}4)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (0{,}6\times 0{,}8+0{,}4\times 0{,}1 \quad 0{,}6\times 0{,}2+0{,}4\times 0{,}9)$

$P_1=(0{,}48+0{,}04 \quad 0{,}12+0{,}36) = (0{,}52 \quad 0{,}48)$

4. $P_2=P_1M = (0{,}52 \quad 0{,}48)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (0{,}52\times 0{,}8+0{,}48\times 0{,}1 \quad 0{,}52\times 0{,}2+0{,}48\times 0{,}9)$

$P_2=(0{,}416+0{,}048 \quad 0{,}104+0{,}432) = (0{,}464 \quad 0{,}536)$

$P_3=P_2M = (0{,}464 \quad 0{,}536)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (0{,}464\times 0{,}8+0{,}536\times 0{,}1 \quad 0{,}464\times 0{,}2+0{,}536\times 0{,}9)$

$P_3=(0{,}3712+0{,}0536 \quad 0{,}0928+0{,}4824) = (0{,}4248 \quad 0{,}5752)$

En 2008+3=2011 :
42,48 % de la population voyagera avec la compagnie A.
57,52 % de la population voyagera avec la compagnie B.

5. $P=(x \quad y)$ est l'état stable du système si et seulement si P=PM et x+y=1.

P=PM $\Leftrightarrow$ $(x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (0{,}8x+0{,}1y \quad 0{,}2x+0{,}9y)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=0{,}8x+0{,}1y \\ y=0{,}2x+0{,}9y \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 0{,}2x-0{,}1y=0 \\ 0{,}2x-0{,}1y=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\{0{,}2x-0{,}1y=0$ $\Leftrightarrow$ $\{2x-y=0$

Or x+y=1 $\Leftrightarrow$ y=1-x et 2x-(1-y)=0 $\Leftrightarrow$ 2x-1+x=0 $\Leftrightarrow$ 3x=1 $\Leftrightarrow$ $x=\frac{1}{3}$ et $y=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Donc l'état stable est : $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Dans un futur lointain un tiers de la population voyagera avec la compagnie A et deux tiers de la population voyagera avec la compagnie B.

6. Pour tout entier naturel n :

$P_{n+1}=P_nM = (x_{n+1} \quad y_{n+1}) = (x_n \quad y_n) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (0{,}8x_n+0{,}1y_n \quad 0{,}2x_n+0{,}9y_n)$

$x_{n+1}=0{,}8x_n+0{,}1y_n$ et on a $x_n+y_n=1$ soit $y_n=1-x_n$ donc $x_{n+1}=0{,}8x_n+0{,}1(1-x_n)$

$x_{n+1}=0{,}7x_n+0{,}1$

7. Pour tout entier naturel n : $x_n=\frac{4}{15}\times 0{,}7^n+\frac{1}{3}$ $\quad u_n=\frac{4}{15}\times 0{,}7^n$

(u_n) est la suite géométrique de raison q=0,7 et de premier terme $u_0=\frac{4}{15}$.

$0 < 0,7 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

$x_n = u_n + \frac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{1}{3}$ qui correspond à la valeur de x dans l'état stable.

Exercice 3

Il y a deux états :
A : l'état « la personne sondée est favorable à ce groupe politique ».
B : l'état « la personne sondée est défavorable à ce groupe politique »
A et B sont les deux sommets du graphe probabiliste.

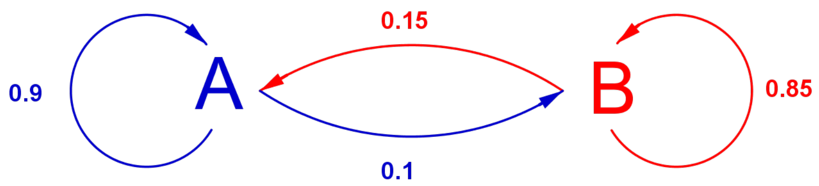
Première Partie

1. Initialement il y a autant de personnes favorables à ce groupe politique que de personnes défavorables à ce groupe politique $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$ et $P_0 = (0,5 \quad 0,5)$.

2. Chaque mois, il y a 10 % des personnes qui étaient favorables à ce groupe politique et qui ne le sont plus donc il y a 90 % des personnes qui étaient favorables à ce groupe politique et qui le restent.
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête AB est : 0,1.
Le poids de l'arête AA est : 0,9.

. Chaque mois il y a 15 % des personnes qui n'étaient pas favorables à ce groupe politique et qui le deviennent donc il y a 85 % des personnes qui n'étaient pas favorables à ce groupe politique et qui le restent.
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête BA est : 0,15.
Le poids de l'arête BB est : 0,85.

. On obtient le graphe probabiliste suivant :



3. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique et on utilise les matrices lignes.

La matrice de transition de ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} = P_n M = (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = (0,9\,a_n + 0,15\,b_n \quad 0,1\,a_n + 0,85\,b_n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0,9\,a_n + 0,1\,b_n \\ b_{n+1} = 0,1\,a_n + 0,85\,b_n \end{cases}$$

$a_1 = 0,9 \times 0,5 + 0,15 \times 0,5 = 0,525 = 0,53$ à 10^{-2} près.
$b_1 = 0,1 \times 0,5 + 0,85 \times 0,5 = 0,475 = 0,47$ à 10^{-2} près
$P_1 = (0,53 \quad 0,47)$
$a_2 = 0,53 \times 0,9 + 0,47 \times 0,15 = 0,5475 = 0,55$ à 10^{-2} près
$b_2 = 0,53 \times 0,1 + 0,47 \times 0,85 = 0,4525 = 0,45$ à 10^{-2} près
$P_2 = (0,55 \quad 0,45)$

4. $P = (x \quad y)$ est l'état stable si et seulement si P=PM et x+y=1.

$P=PM \Leftrightarrow (x \quad y)=(x \quad y)\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\0,15 & 0,85\end{pmatrix} \Leftrightarrow (0,9x+0,15y \quad 0,1x+0,85y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0,9x+0,15y\\y=0,1x+0,85y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0,1x-0,15y=0\\0,1x-0,15y=0\end{cases} \Leftrightarrow \{0,1x-0,15y=0$

Or x+y=0 soit y=1-x

$0,1x-0,15(1-x)=0 \Leftrightarrow 0,25x-0,15=0 \Leftrightarrow x=\frac{0,15}{0,25}=0,6$ et $y=1-0,6=0,4$

L'état stable est : $P=(0,6 \quad 0,4)$.

Deuxième partie

1. Pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1}=0,9a_n+0,15b_n$ et $a_n+b_n=1$
$a_{n+1}=0,9a_n+0,15(1-a_n)=0,75a_n+0,15$

2. Pour tout entier naturel n : $u_n=a_n-0,6$ donc $a_n=u_n+0,6$.

2.a. Pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=a_{n+1}-0,6=0,75a_n+0,15-0,6=0,75a_n-0,45=075(u_n+0,6)-0,45=0,75u_n+0,75\times0,6-0,45$
$u_{n+1}=0,75u_n$
$u_0=a_0-0,6=0,5-0,6=-0,1$
(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_o=-0,1$ et de raison q=0,75.

2.b. Pour tout entier naturel n :
$u_n=u_0q^n=-0,1\times0,75^n$
$a_n=u_n+0,6$
$a_n=-0,1\times0,75^n+0,6$

2.c. $0<0,75<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ et $\lim_{n\to+\infty}a_n=0,6$.
Lorsque n tend vers $+\infty$ le pourcentage de la population favorable à ce groupe politique tend vers 60 %.
Lorsque n tend vers $+\infty$ l'état P_n tend vers l'état stable $P=(0,6 \quad 0,4)$ donc la suite (a_n) tend vers 0,6.