Vocabulaire des graphes non orientés

1. Introduction

On considère un ensemble de points du plan.

On relie certaines paires de points par des « liens » (c'est à dire des lignes qui ne sont pas nécessairement des droites).

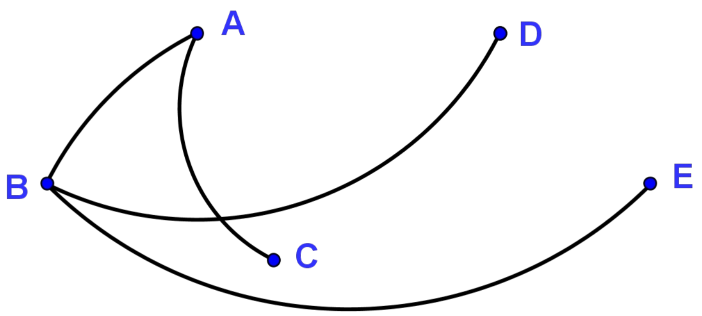


fig 1

La figure obtenue se nomme **Graphe.**

2. Vocabulaire élémentaire

. Les points sont nommés **sommets** du graphe.

. Le lien (ou la ligne) joignant deux sommets se nomme **arête.**

. Lorsqu'il existe une arête joignant deux sommets, on dit que ces sommets sont **adjacents.**

. **L'ordre** du graphe est le nombre de sommets du graphe.

. **Le degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.

. On dit que le graphe est **complet** si et seulement si toutes les paires de points sont reliés par une arête.

<u>Exemples</u>

. On considère le graphe G de la figure 1, l'ordre du graphe G est **5** (il y a 5 sommets).

Le degré de A est 2.

Le degré de B est 3.

Le degré de C est 1.

Le degré de D est 1.

Le degré de E est 1.

Les sommets A et B sont adjacents car A et B sont reliés par une arête.

Les sommets A et E ne sont pas adjacents car A et E ne sont pas reliés par une arête.

De même les sommets A et D ne sont pas adjacents.

Il existe au moins une paire de sommets non adjacents (non reliés par une arête) donc le graphe G n'est pas complet.

<u>Remarque</u>

Le nombre d'arêtes est 4 et la somme des degrés des 5 sommets est $2+3+1+1+1=8$

. On considère le graphe G' de la figure 2

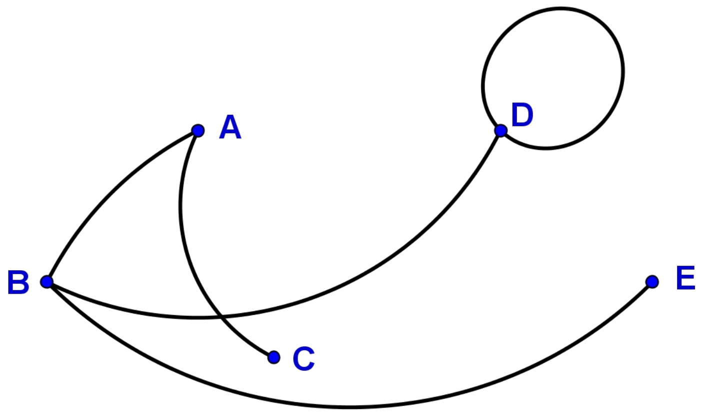


fig 2

On a ajouté une boucle en D c'est à dire une arête dont l'origine est l'extrémité sont confondues.

L'ordre de G' est 5.

Le degré de A est 2.

Le degré de B est 3.

Le degré de C est 1.

Le degré de D est **3.**

Le degré de E est 1.

Le graphe n'est pas complet.

Remarque

Le nombre d'arêtes est 5 et la somme des degrés des 5 sommets $2+3+1+3+1=10$.

3. Propriété (admise)

La somme des degrés dans un graphe non orienté est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe

4. Matrice associée à un graphe non orientés

Pour l'exemple 1, on numérote les sommets de 1 à 5, A:1, B:2, C:3, D:4, E:5 et on remplit le tableau à double entrée suivant, dans la case de la ligne i et de la colonne j on écrit le nombre a_{ij} égal à 1 s'il existe une arête reliant i à j et 0 sil n'existe pas d'arête reliant i à j.

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	1
3	1	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0

Le tableau des a_{ij} se nomme matrice associée au graphe G.

matrice associée $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cette matrice est carrée : 5 lignes et 5 colonnes.

Cette matrice est symétrique par rapport à la diagonale (c'est à dire $a_{ij}=a_{ji}$).

<u>Remarque</u>

Pour l'exemple 2 (on a tout simplement ajouté une boucle en D:4) le coefficient $a_{44}=1$ pour la nouvelle matrice et tous les autres sont inchangés.

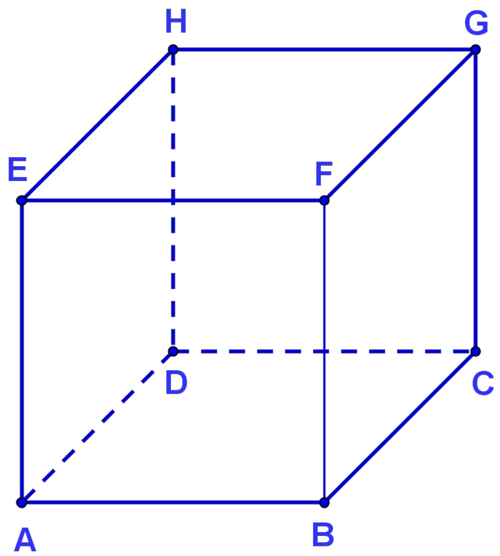
Matrice associée $M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Sous graphes d'un graphe

- Un sous graphe d'un graphe d'un graphe G est un graphe G' composé d'une partie des sommets de G ainsi que toute les arêtes qui les relient.
- Un sous graphe stable est un sous graphe sans arêtes.

6. Exemples

6.a. Soit ABCDEFGH un cube, on numérote ses 6 faces.



1 (ABCD)

2 (ABEF)

3 (EFGH)

4 (DCGH)

5 (BCGF)

6 (ADHE)

On construit le graphe suivant :

Les sommets sont les six chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On relie par une arête deux chiffres si et seulement s'il existe un côté (du cube) commun aux deux faces correspondant aux deux chiffres.

On remarque que deux faces du cube n'ont pas de côté commun si et seulement si elles sont opposées (ces faces sont alors strictement parallèles).

La face opposée de la face 1 est la face 3, on trace les arêtes d'origine 1 et d'extrémités 2, 4, 5, 6.

Puis on trace les arêtes d'origine 3 et d'extrémités 2, 4, 5, 6.

La face opposée de la face 2 est la face 4.

On trace les arêtes d'origine 2 et d'extrémités 5 et 6 (les arêtes d'extrémités 1 et 3 sont déjà tracées).

On trace les arêtes d'origine 4 et d'extrémités 5 et 6.

La face opposée de la face 5 est la face 6.

Toutes les arêtes issues de 5 ou 6 sont déjà tracées.

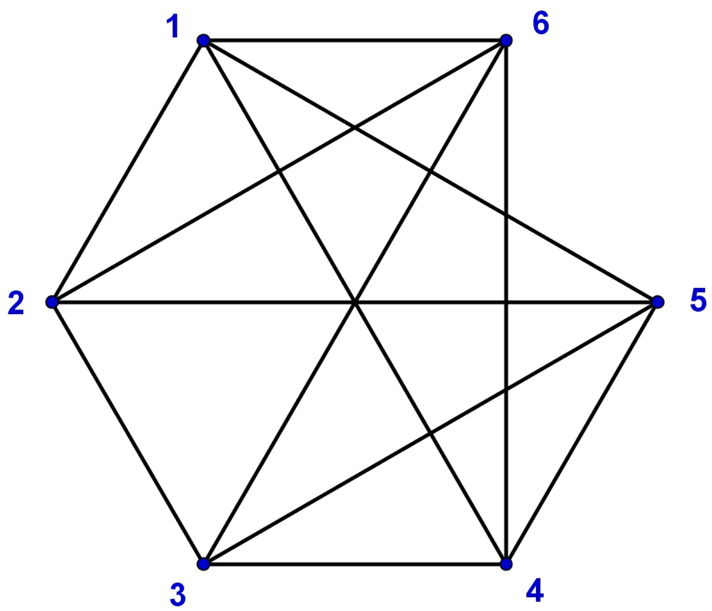


fig 3

La somme des degrés des 6 sommets est $6\times4=24$

Le nombre d'arêtes est 12.

On vérifie : $24=2\times12$

On note M la matrice associée à ce graphe.

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.b. On organise un tournoi de quatre équipes de football (chaque équipe rencontre une fois et une seule toutes les autres).

On numérote ces équipes : 1, 2, 3 et 4.

On obtient comme graphe correspondant à cette situation.

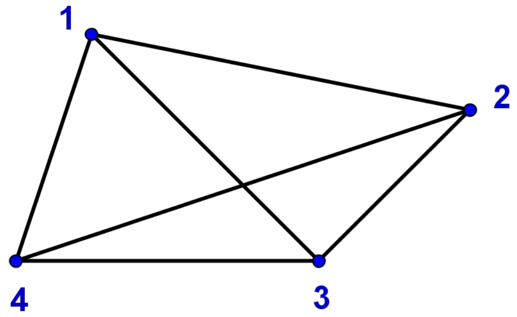


fig 4

La somme des degrés des quatre sommets est : $4 \times 3 = 12$

Le nombre d'arêtes est : 6

On a bien $12 = 2 \times 6$

Le nombre d'arêtes correspond au nombre de matchs pendant le tournoi.

Chaque sommet est relié à tous les autres sommets donc ce graphe est **complet** .

On note M la matrice associée à ce graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

Si un graphe est complet tous les nombres a_{ij} avec $i \neq j$ sont non nuls.

6.c. On considère le graphe G suivant :

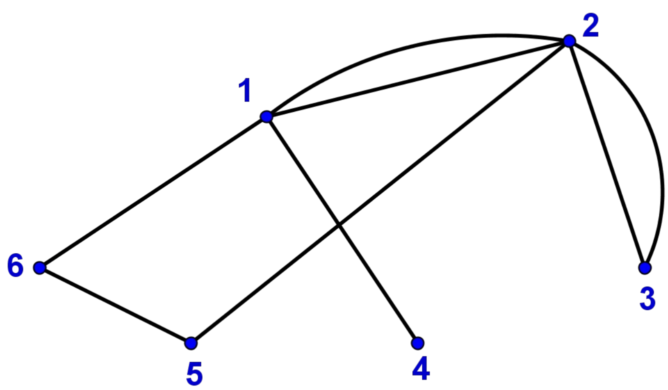


fig 5

On note M la matrice associée à G

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. On considère G' le sous graphe contenant 1, 2, 3 et 5

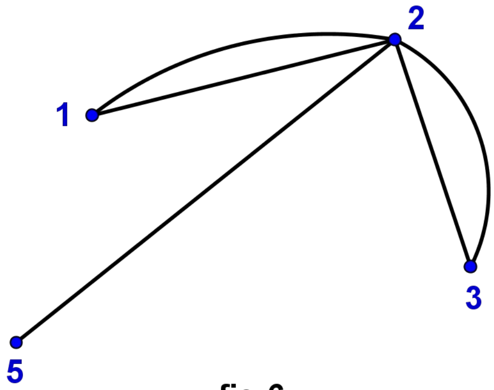


fig 6

. On considère le sous graphe contenant 3, 4 et 6

fig 7

G'' est un graphe stable de G.