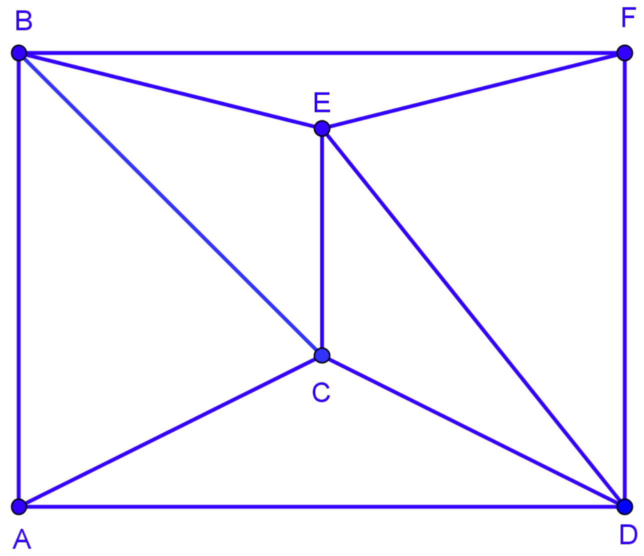
Exercice 2

On considère le graphe G suivant :



1. Le graphe G est-il connexe ? Expliquer la réponse.

2. Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.

3. Justifier la non-existence d'un cycle euiérien pour le graphe G. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un cycle eulérien ?

4. Déterminer un encadrement du nombre chromatique du graphe G. Justifier la réponse.

5. Déterminer le nombre chromatique, en explicitant clairement la démarche.

6. Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

7. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 10 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F.
Citer alors toutes ces chaînes.

(sujet Bac ES Antilles-Guyane juin 2009)

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. Le graphe G est connexe car il existe toujours une chaîne reliant deux sommets distincts.

2. Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

On détermine les degrés des sommets du graphe G.

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degré des sommets du graphe	3	4	4	4	4	3

Ici il y a 2 sommets de degré impair donc le graphe admet une chaîne eulérienne.
Pour trouver une chaîne eulérienne on doit choisir pour sommet initial et pour sommet final les deux sommets de degré impair.

Exemple de chaîne eulérienne : **ACDABCEDFBEF.**

3. Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 (tous les sommets ont un degré pair).

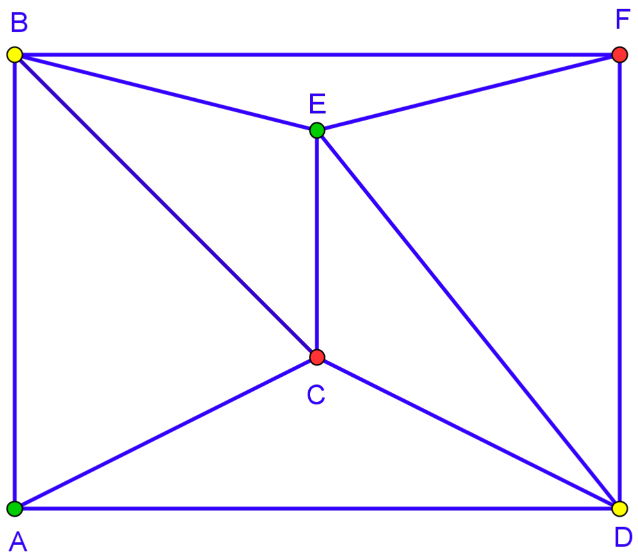
Donc ici il y a 2 sommets de degré impair et il n'y a pas de cycle eulérien.
Si on ajoute l'arête : AF alors tous les sommets sont de degré 4 donc le nouveau graphe obtenu admet un cycle eulérien.

4. Il existe un sous-graphe complet d'ordre 3 par exemple : {A;B;C} mais il n'existe pas de sous-graphe complet d'ordre 4.

Donc le nombre chromatique est supérieur ou égal à3.
Le degré maximal d'un sommet est : $\Delta=4$;
Le nombre chromatique est inférieur à $\Delta+1=5$.
Le nombre chromatique est compris enre 3 et 5.

5. On utilise l'algorithme de coloriage

Liste des sommets : C, D, E, B, A, F
Liste des couleurs : rouge, jaune, vert, bleu . . .
On colorie C en rouge , le sul sommet non adjacent à C est F que l'on colorie en rouge.
On colorie D en jaune, le seul sommet non adjacent à D est B que l'on colorie en jaune.
On colorie E en vert, le seul sommet non adjacent à E est A que l'on colorie en vert.
Tous les sommets sont coloriés avec 3 couleurs.



Le nombre chromatique du graphe estdonc : 3.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

6. Les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique
m_{ij} (i : ligne j : colonne) est le nombre d'arêtes reliant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet.
Ici les valeurs obtenues sont 0 ou 1.

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à F est $m'_{16}=5$ coefficent de M^3 .
On détermine les chaînes :
ADEF
ABEF
ACDF
ACBF
ACEF

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés