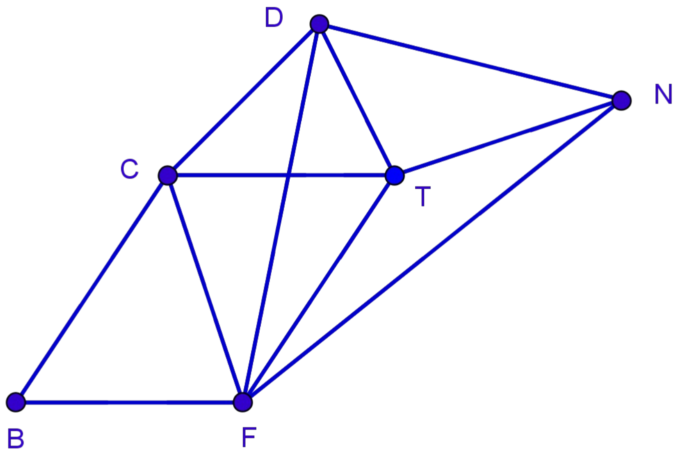
Exercice 4

Un groupe d'amis organise une randonnée dans les alpes.
On a représenté par le graphe ci-dessous Les sommets B, C, D, E, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer
Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



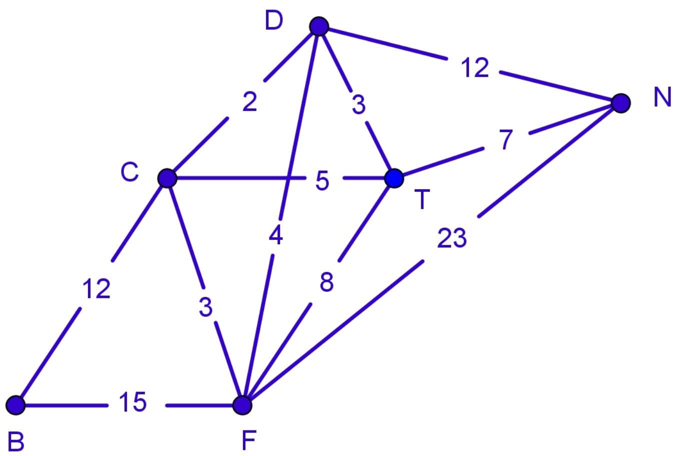
1.a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

1.b. Justifier que le graphe est connexe.

2. Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin. Démontrer que leur souhait est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.

3. Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.
3.a. Montrer que $4 \leqslant n \leqslant 6$.
3.b. Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.
4. Le groupe se trouve au sommet B et souhaite se rendre au sommet N. les distances en kilomètres entre chaque sommet ont été ajoutées sur le gaphe.



Indiquer une chaîne qui minimise la distance du trajet. Justifier la réponse.
(Sujet bac TES Amérique du Nord juin 2009)

CORRECTION

1.a. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.

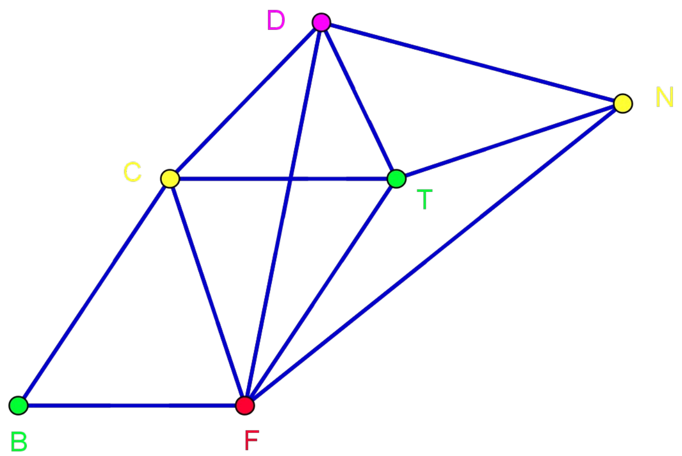
Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe	2	4	4	5	3	4

1.b. Le graphe est connexe car il existe toujours une chaîne reliant deux sommets distincts.

2. Le graphe admet deux sommets de degé impair et les autres ont un degré pair.
Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin.
Ceci est réalisable si et seulement si le graphe admet une chaîne eulérienne.
Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
Donc le graphe admet au moins une chaîne eulérienne et le souhait est réalisable.
Exemple de trajet possible
(les deux sommets de degré impair sont les extrémité de la chaîne)
FCBFNTFDCTDN

3.a. n est le nombre chromatique du graphe.
Le graphe admet un sous-graphe complet d'ordre 4 ({C.D.N;F}est un sous-graphe complet).
Donc $4 \leqslant n$.
Δ est le degré maximal des sommets.
$\Delta = 5$ et $\Delta + 1 = 6$.
Donc $n \leqslant 6$
Conclusion
$4 \leqslant n \leqslant 6$

3.b. On utilise l'algorithme de coloriage.
Liste des sommets : F, T, C, D, N, B (Ordre décroissant des degrés des sommets)
Liste des couleurs : Rouge, Vert, Jaune, Violet, Bleu . . .
On colorie le sommet F en rouge.
Tous les autres sommets sont adjacents à F.
On colorie le sommet T en vert.
Le seul sommet non adjacent à T et non colorié est le sommet B que l'on colorie en vert.
On colorie le sommet C en jaune.
Le seul sommet non adjacent à C et non colorié est le sommet N que l'on colorie en jaune.
On colorie le sommet D en violet.
Tous les sommets sont alors coloriés.



On utilise 4 couleurs (ou $4 \leqslant n \leqslant 6$ donc le nombre chromatique n est égal à 4.

4. On utilise l'algorithme de Diijkstra

B	C	D	F	N	T
0	∞	∞	∞	∞	∞
0(B)	12(B)	∞	15(B)	∞	∞
	12(B)	14(C)	15(B)	∞	17(C)
		14(C)	15(B)	26(D)	17(C)
			15(B)	26(D)	17(C)
				24(T)	17(C)
				24(T)	

La distance minimale d'un chemin reliant B à N est **24km**

N→T→C→B

On obtient pour chemin : **BCTN.**