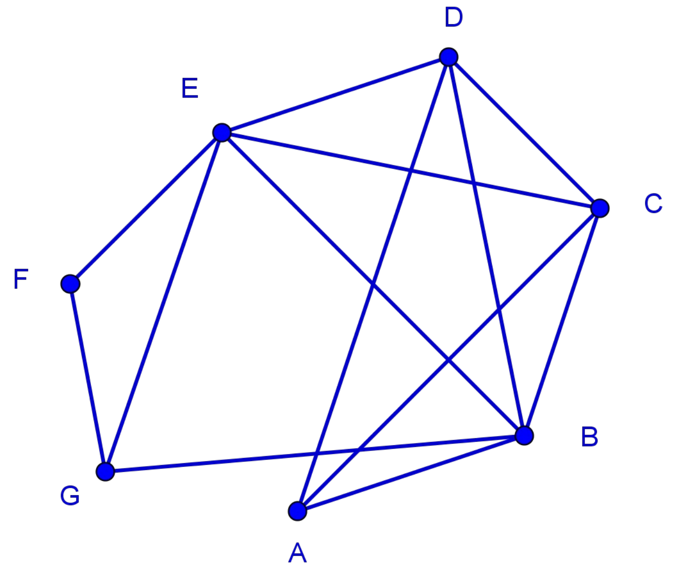
Exercice 5

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G.Cela conduit au graphe $\mathcal{G}$ suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



1. Le graphe $\mathcal{G}$ est-il complet ? Quel est l'ordre de $\mathcal{G}$?

2.a. Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes.
Proposer un coloriage adapté à cette condition.
2.b. Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de $\mathcal{G}$?

3.a. Quelle est la nature du sous-graphe formé des sommets A, B, C et D ?
3.b. Quel est le nombre minimal de couleurs que la comagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2. ?

4.a. En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique , construire la matrice M associée à $\mathcal{G}$?
4.b. On donne :

$$M^8=\begin{pmatrix} 6945 & 9924 & 8764 & 8764 & 9358 & 3766 & 5786 \\ 9924 & 14345 & 12636 & 12636 & 13390 & 5486 & 8310 \\ 8764 & 12636 & 11178 & 11177 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 8764 & 12636 & 11177 & 11178 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 9358 & 13390 & 11807 & 11807 & 12634 & 5095 & 7807 \\ 3766 & 5486 & 4829 & 4829 & 5095 & 2116 & 3181 \\ 5786 & 8310 & 7369 & 7369 & 7807 & 3181 & 4890 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 8 qui relient B à D ?

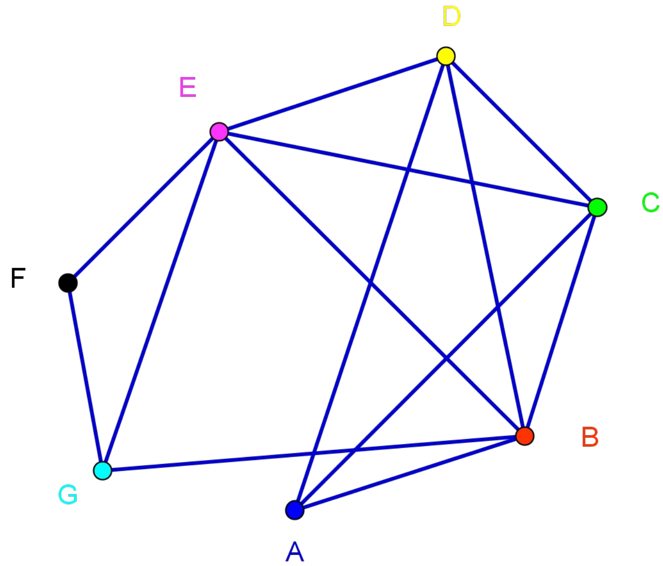
5.a. Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois ?
5.b. Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.

(Sujet Bac TES Polynésie juin 2006)

CORRECTION

1. Le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas complet car par exemple les sommets C et F ne sont pas reliés par une arête.
Il y a 7 sommets dans le graphe $\mathcal{G}$ donc l'ordre du graphe $\mathcal{G}$ est **7.**

2.a. On peut alors proposer une couleur différente pour chaque sommet.
Par exemple : A : bleu ; B : rouge ; C : vert ; D : jaune ; E:: violet ; F: noir ; G : bleu clair



2.b. Il y a 7 sommets donc le nombre chromatique est inférieur ou égal à 7. (remarque : le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas complet donc le nombre chromatique n'est pas égal à 7).

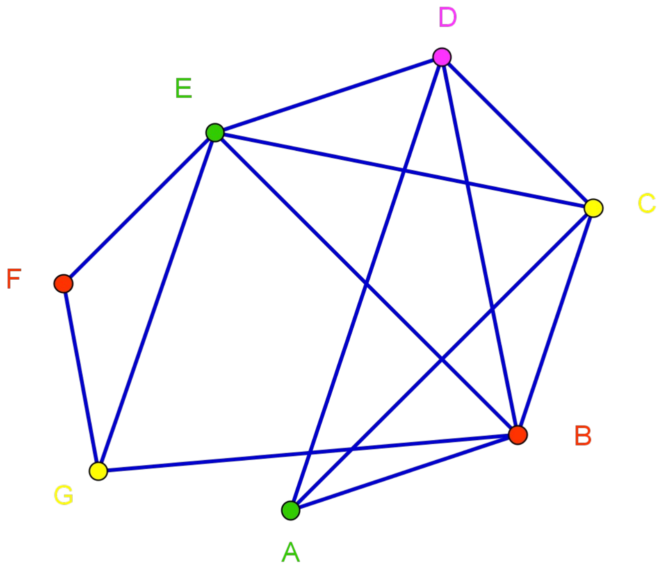
3.a. Le sous-graphe formé par les sommets A;B;C et D est un sous-graphe complet (ses 4 sont reliés deux à deux.
On remarque qu'il n'existe pas de sous-graphe d'ordre 5 complet).

3.b. Le nombre chromatique de $\mathcal{G}$ est donc supérieur ou égal à 4.
Pour déterminer le nombre chromatique, on propose d'utiliser l'algorithme de coloration.
On écrit d'abord le degré de tous les sommets.

A	B	C	D	E	F	G
3	5	4	4	5	2	3

Liste des sommets : B ; E ; C ; D ; A ; G ; F
Liste des couleurs : Rouge ; Vert ; Jaune ; Violet ; Bleu …
On colorie le sommet B en rouge.
Le seul sommet non adjacent à B est le sommet F que l'on colorie en rouge.
On colorie le sommet E en vert.
Le seul sommet non adjacent à E et non colorié est le sommet A que l'on colorie en vert.
On colorie le sommet C en Jaune.
Le seul sommet non adjacent à C et non colorié est le sommet G que l'on colorie en jaune .
On colorie le dernier sommet D en violet.
La coloration du graphe est terminée.

Nous avons utilisé 4 couleurs pour colorier le graphe donc le nombre chromatique est : **4.**



4.a. Les sommets sont classés dans l'ordre alphabétique.

M est la matrice associée au graphe $\mathcal{G}$

m_{ij} i : ligne j : colonne

m_{ij} est le nombre d'ar^tes reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet.

Ici m_{ij} est égal à 0 et 1.

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.b. On note m'_{ij} les coefficients de M^8.

m'_{ij} est le nombre de chaînes de longueur 8 qui relient le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet.

B est le $2^{\text{ème}}$ sommet et D est le $4^{\text{ème}}$ sommet donc le nombre de chaînes qui relient le sommet B au sommet D est $m'_{24}=12636$.

5.a. Le graphe est connexe car il existe toujours une chaîne reliant deux sommets distincts.

Théorème d'Euler

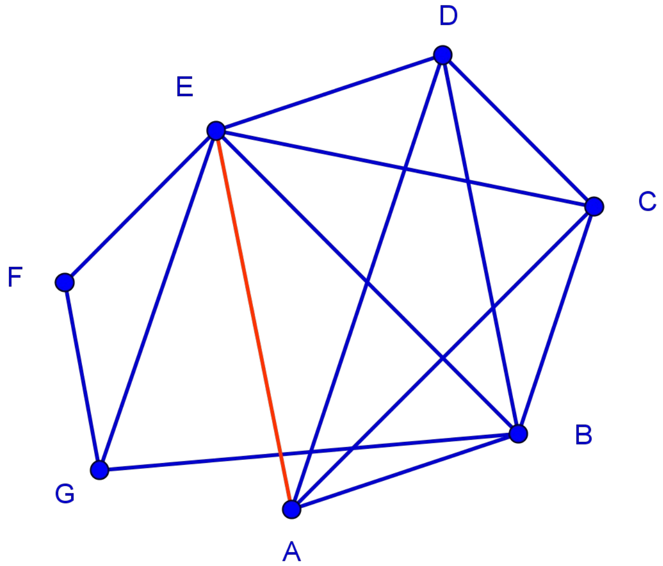
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Ici le nombre de sommets de degré impair est : 4 donc le graphe $\mathcal{G}$ n'admet pas de chaîne eulérienne et il est impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois.

5.b. On trace une nouvelle arête au graphe $\mathcal{G}$ joignant deux sommets de degré impair (non encore relié) par exemple AE (on ajoute une liaison aérienne reliant A à E).

Le nouveau graphe obtenu a deux et deux seulement de degré impair : B et G.

Ce nouveau graphe admet au moins une chaîne eulérienne.



Pour obtenir une chaîne eulérienne, on considère une chaîne reliant B à G (les deux sommets de degré impair) contenant les arêtes du nouveau graphe au plus une fois ici on choisit : **BG.**
De B on considère le cycle BCDEAB.
De G on considère le cycle GEFG.
On obtient comme chaîne eulérienne **BCDEABGEFG.**
On obtient donc un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois.