Exercice 6

M. et M^{me} Martin, qui habitent une grande ville, aiment beaucoup voyager, ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit dans une région en France.
S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est 0,4.
Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'année suivante est 0,7.
En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste l'année (2009+n), où a_n désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année (2009+n) et b_n la ptobabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année (2009+n).

1.a. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et E (F pour France ; E pour Etranger).

1.b. En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord F puis E pour ordre des sommets. On notera M cette matrice.

2.a. Donner P_0, l'état probabiliste initial, l'année 2009.

2.b. On donne les résultat suivants :

$M^2=\begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}$ $M^3=\begin{pmatrix} 0,444 & 0,556 \\ 0,417 & 0,583 \end{pmatrix}$ $M^4=\begin{pmatrix} 0,4332 & 0,5668 \\ 0,4251 & 0,5749 \end{pmatrix}$

En choisissant la bonne matrice, calculer P_3. En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012. (*On donnera le résultat sous forme décimale au centième).*

3. Soit P la matrice ligne $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ donnant l'état stable où x et y sont deux réels positifs tels que $x+y=1$.
Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

(D'après sujet Bac TES Antilles-Guyane juin 2010)

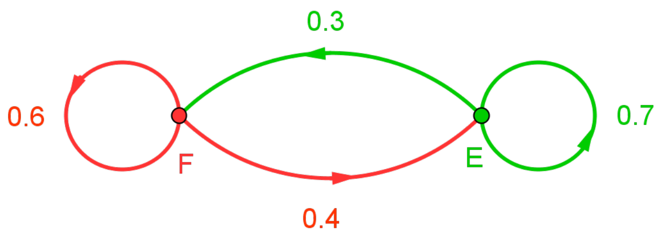
CORRECTION

1.a. Il y a deux états F et E.

. « Si M. er M^{me} Martin sont restés en France une année donnée , la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est 0,4 » donc la probabilité qu'ils restent enFrance l »année suivante est $1-0{,}4=0{,}6$.
Conséquence
Le poids de l'arête FE est 0,4 et le poids de l'arête FF est égal à 0,6.

. « S'ils sont partis à l'étranger une année donée,la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'année suivante est de 0,7 » donc la probabilité qu'ilsrestent en france l'année suivante est $1-0{,}7=0{,}3$.
Conséquence
Le poids de l'arête EE est 0,7 et le poids de l'ar^te EF est 0,3.

. Arbre probabiliste



1.b. L'ordre des états est F puis E.

La matrice de transition est $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est égal au poids de l'arête FF donc égal à 0,6
m_{12} est égal au poids de l'arête FE donc égal à 0,4
m_{21} est égal au poids de l'arête EF donc égal à 0,3
m_{22} est égal au poids de l'arête EE donc égal à 0,7

$M=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

2.a. En 2009 le couple est parti à l'étranger donc $b_0=1$ et $a_0=0$
$P_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.b. Pour tout entier naturel n $P_n=P_0\times M^n$

Donc $P_3=P_0\times M^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}444 & 0{,}556 \\ 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}417 & 0{,}583 \end{pmatrix}$

On arrondit au centième $P_3=\begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}58 \end{pmatrix}$

3. $P=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ $x>0$; $y>0$ et $x+y=1$

P est l'état stable si et seulement si $P=P\times M$ et $x+y=1$

$\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}6x+0{,}3(1-x)=x \\ 0{,}4x+0{,}7(1-x)=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}3=(1+0{,}3-0{,}6)x \\ (0{,}4-0{,}7+1)x=1-0{,}7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{0{,}7x=0{,}3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{7}$

Donc $y=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

$x=0{,}43$ à 10^{-2} près et $y=0{,}57$ à 10^{-2} près $P=\begin{pmatrix} 0{,}43 & 0{,}57 \end{pmatrix}$

Conséquence
Dans plusieurs années la probabilité pour le couple de partir à l'étranger sera de 0,57 et celle de rester en France est de 0,43.