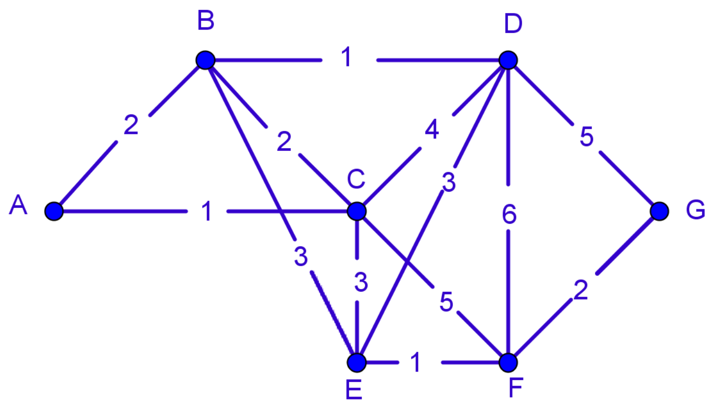
Exercice 7

Le graphe ci-dessous représente le plan d'une ville.
Le sommet A désigne l'enplacement des services techniques.
Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements des jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.



Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On s'intéresse au graphe non pondéré.
1. Répondre sans justification aux quatre questions suivantes :
1.a. Ce graphe est-il connexe ?
1.b. Ce graphe est-il complet ?
1.c. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
1.d. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ?

2. Déterminer, en justifiant, le nombre chromatique de ce chromatique de ce graphe.

Partie 2

On s'intéresse au graphe pondéré.
Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G.
La réponse sera justifiée par un algorithme.

CORRECTION

Partie 1

1.a. Le graphe est connexe.
Justification non demandée
Il existe toujours une chaîne reliant deux points distincts.

1.b. Le graphe n'est pas complet.
Justification non demandée
Par exemple les sommets A et D ne sont pas reliés par une arête.

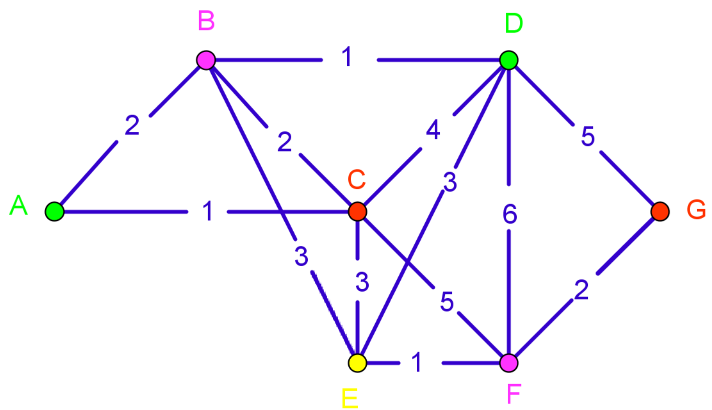
1.c. Il existe au moins une chaîne eulérienne.
Justification non demandée
Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
On détermine les degrés des diff érents sommets (on donne les résultats sous la forme d'un tableau).

A	B	C	D	E	F	G
2	4	5	5	4	4	2

Il y a deux et seulement deux sommets de degré impair donc le graphe admet une chaîne eulérienne.

1.d. Le graphe n'admet pas de cycle eulérien.
Justification non demandée
Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet un ctcle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 (tous les sommets ont un degré pair).
Il existe deux sommets de degré impair donc il n'existe pas de cycle eulérien.

2. Le sous-graphe constitué des 4 sommets E,C,D et F est complet, donc le nombre chromatique est supérieur ou égal à 4.
On utilise l'algorithme de coloriage.
Liste des sommets : C,D, E, ,F B, A et G.
Liste des couleurs : Rouge, Vert, Jaune, Violet, Bleu, . . .
On colorie le sommet C en rouge, le seul sommet non adjacent à C et non colorié est le sommet G que l'on colorie en rouge.
On colorie le sommet D en vert, le seul sommet non adjacent à D et non colorié est le sommet A que l'on colorie en vert.
On colorie le sommet E en jaune et il n'existe pas de sommet non adjacent à E et non colorié.
On colorie le sommet F en violet, le seul point non adjacent à F et non colorié est le sommet B que l'on colorie en violet



Le coloriage obtenu contient 4 couleurs donc le nombre chromatique du graphe est 4.

Partie 2

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	2(A)	1(A)	∞	∞	∞	∞
	2(A)	1(A)	5(C)	4(C)	6(C)	∞
	2(A)		3(B)	4(C)	6(C)	8(D)
			3(B)	4(C)	6(C)	8(D)
				4(C)	5(E)	8(D)
					5(E)	7(F)
						7(F)

Un trajet admettant un nombre de feux tricolores admet **7 feux.**
G→F→E→C→A
Le trajet est : **ACEFG.**