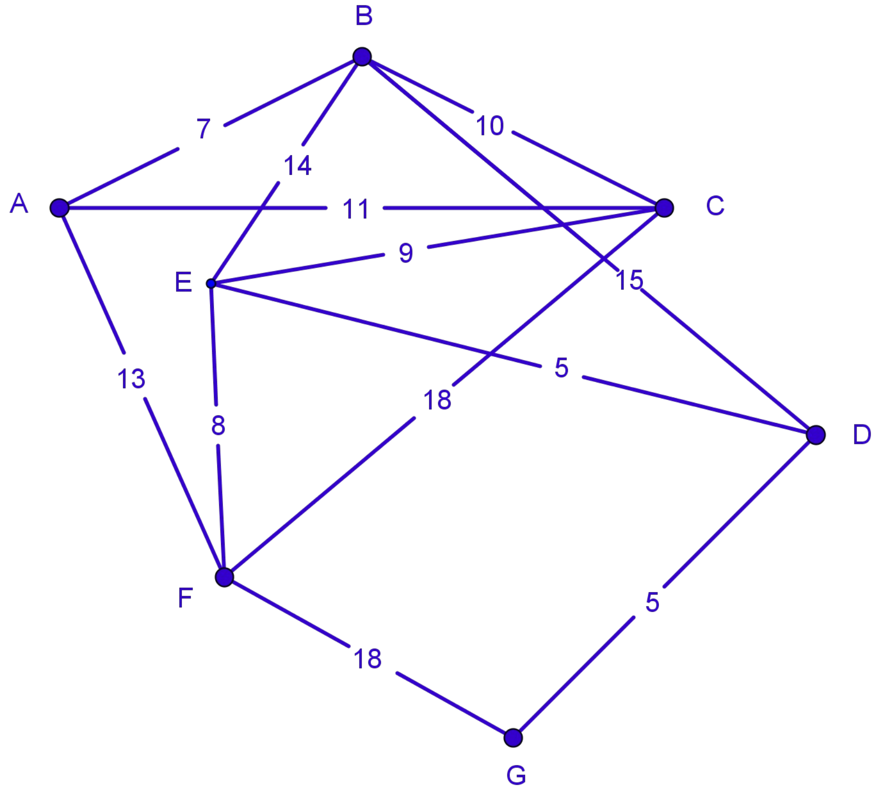
Exercice 8

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix, la ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.
Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-dessous :



1. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables. A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables. Justifier la réponse. A la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.

2. On appelle M la matrice associée à ce graphe, on donne Deux matrices N et T :

$$N=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2.a. Une des deux matrices N et T est la matrice M^3. Sans calcul, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier la réponse.

2.b. Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

3. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. A l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner le temps nécessaire pour l'effectuer.

(Sujet Bac ES Polynésie 2008)

CORRECTION

1. Philippe peut effectuer un parcours en empruntant une fois et une seule fois toutes les pistes cyclables si et seulement si le graphe admet une chaîne eulérienne.

. **Théorème d'Euler**
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

. Ici le graphe est connexe car il existe toujours une chaîne reliant deux sommets distincts.
. On détermine les degrés des sommets (on donne les résultats sous la forme d'un tableau).

A	B	C	D	E	F	G
3	4	4	3	4	4	2

. Il y a deux sommets et deux seulement ayant un degré impair donc il existe au moins une chaîne eulérienne. Donc Philippe peut effectuer un parcourt empruntant une fois et une seule fois toutes les pistes cyclables.
. Pour que Philippe puisse se rendre è la station de départ, il faut que le graphe admette un cycle eulérien. Pour cela le graphe doit avoir 0 sommet de degré impair.

Remarque :
Philippe pourra partir de A et arriver à D ou partir de D et arriver à A (les deux sommets de degré impair).
Exemple de parcours : (non demandé)
ABCAFEBDECFGD

3.a. Les sommets du graphe sont placés dans l'ordre alphabétique pour l'écriture de la matrice associée M.
On note m_{ij} (i : ligne j : colonne) les coefficients de M^3 .
m_{ij} est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet.
On note n_{ij} pour N et on note t_{ij} pour T.
On a $n_{71}=2$ et $t_{ij}=1$
On détermine les chaînes de longueur 3 reliant G et A.
Il y en a **2** : **GDAB et GFCA.**
Donc $N=M^3$.

3.b. Philippe est passé exactement 2 fois devant une station (cette station ne peut pas être E ou F).
S'il passe deux fois dans la même arête, il passe deux fois devant deux stations. Pour son parcours il passe une fois au plus par chaque arête. Le degré du sommet (de la station considérée) est donc supérieur ou égal à 4. on obtient les sommets C ou B.
C donne deux possibilités : **FCBACE et FCABCE.**
B aucune possibilité.

4. On utilise l'algorithme de Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	7(A)	11(A)	∞	∞	13(A)	∞
	7(A)	11(A)	22(B)	21(B)	13(A)	∞
		11(A)	22(B)	20(C)	13(A)	∞
			22(B)	20(C)	13(A)	31(F)
			22(B)	20(C)		31(F)
			22(B)			27(D)
						27(D)

Le temps minimal est 27mn.

G→D→B→A

Le trajet est : **ABDG.**