

Exercice 9

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.

De plus, chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'inscrivent.

On appelle n le nombre d'années d'existence du club.

On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'y est pas inscrite.

La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20 % des habitants de la ville se sont inscrits.

On note $E_n = (g_n \ p_n)$ la matrice l'état probabiliste de l'année n .

On a $E_0 = (0,2 \ 0,8)$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. On nomme A la matrice de transition associée à cette situation, c'est à dire la matrice vérifiant : pour entier naturel n , $E_{n+1} = E_n \times A$
Donner la matrice A .
3. Déterminer E_1 et E_2 . Interpréter les résultats.
4. Déterminer l'état probabiliste stable (on donnera les coefficients de la matrice ligne sous la forme de fractions irréductibles).

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

(Sujet Bac ES Nouvelle calédonie 2014)

CORRECTION

1. On note **G** : la personne est inscrite au club de gymnastique une année.

On note **P** : la personne n'est pas inscrite au club de gymnastique une année.

Le graphe admet deux états : **G** et **P**.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.

Conséquence : 70 % des personnes inscrites au club ne renouvellent pas leur inscription au club.

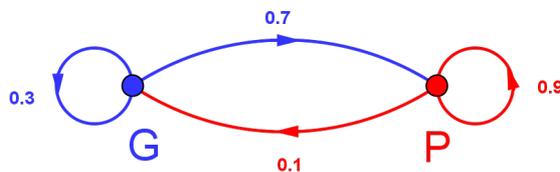
Donc le poids de l'arête **GG** est **0,3** et le poids de l'arête **GP** est **0,7**.

Chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club de gymnastique l'année précédente s'y inscrivent.

Conséquence : 90 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club de gymnastique ne s'y inscrivent pas.

Donc le poids de l'arête **PG** est **0,1** et le poids de l'arête **PP** est **0,9**.

On obtient le graphe probabiliste suivant de sommets **G** et **P**



2. La matrice **A** associée à cette situation est une matrice carrée 2 x 2

$$A = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad \text{L'ordre des sommets est G et P}$$

m_{11} est le poids de l'arête : GG $m_{11} = 0,3$

m_{12} est le poids de l'arête : GP $m_{12} = 0,7$

m_{21} est le poids de l'arête : PG $m_{21} = 0,1$

m_{22} est le poids de l'arête : PP $m_{22} = 0,9$

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

3. Pour tout entier naturel n

$$E_n = (g_n \quad p_n) \quad E_0 = (0,2 \quad 0,8)$$

$$E_{n+1} = E_n \times A$$

$$E_1 = E_0 \times A$$

$$E_1 = (0,2 \quad 0,8) \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = (0,2 \times 0,3 + 0,8 \times 0,1 \quad 0,2 \times 0,7 + 0,8 \times 0,9)$$

$$E_1 = (0,14 \quad 0,86) \quad g_1 = 0,14 \quad p_1 = 0,86$$

14 % des habitants de la ville sont inscrites au club de gymnastique l'année 1

$$E_2 = E_1 \times A$$

$$E_2 = (0,14 \quad 0,86) \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = (0,14 \times 0,3 + 0,86 \times 0,1 \quad 0,14 \times 0,7 + 0,86 \times 0,9)$$

$$E_2 = (0,128 \quad 0,872) \quad g_2 = 0,128 \quad p_2 = 0,872$$

12,8 % des habitants de la ville sont inscrits au club de gymnastique l'année 2

4. soit $(g \ p)$ l'état stable c'est à dire :

$$(g \ p) = (g \ p) \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \quad \text{et } g + p = 1$$

$$(g \ p) = (0,3g + 0,1p \quad 0,7g + 0,9p)$$

$$\begin{cases} g = 0,3g + 0,1p \\ p = 0,7p + 0,9g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,7g = 0,1p \end{cases}$$

et on a $g + p = 1$ donc $p = 1 - g$

$$0,7g = 0,1(1 - g)$$

$$0,7g = 0,1 - 0,1g$$

$$0,8g = 0,1$$

$$g = \frac{0,1}{0,8} = \frac{1}{8} \quad \text{et } p = \frac{7}{8}$$

$$(g \ p) = \left(\frac{1}{8} \quad \frac{7}{8} \right)$$

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

Dans un avenir lointain, 12,5 % des habitants seront inscrits au club de gymnastique et ce pourcentage sera constant les années suivantes.