Exercice 10

Les parties A et B sot indépendantes.

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V),se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

PARTIE A

En 2013,l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients,les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent U.
On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit de l'entreprise U l'année 2013+n, ainsi
$u_0 = 0{,}45$
v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année 2013+n.

1 . Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.

2 . Donner u_0 , calculer u_1 et v_1 .

3 . On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui -ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour tout entier naturel n saisi en entrée.
Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.

4 . On admet que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 0{,}15$.On note pour tout nombre entier naturel n, $w_n = u_n - 0{,}6$.

a . Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b . Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n).Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

PARTIE B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;10] par : $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10$ a, b et c sont des nombres réels.
Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, C(x) est le coût total de production en centaines d'euros.
On admet que le triplet (a,b,c) est solution du système (S).

$$(S)\quad \begin{cases} a+b+c=1 \\ 27a+9b+9c=17{,}4 \\ 125a+25b+5c=73 \end{cases} \quad \text{et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1 . a . Ecrire ce système sous la forme MX = Y où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

1 . b . On admet que que la matrice M est inversible. Déterminer,à l'aide de la calculatrice, le triplet (a,b,c) solution du système (S).

2 . En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8000 recharges d'eau produites ?

ANNEXE à l'exercice 2

Recopier sur la copie la partie « traitement » (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

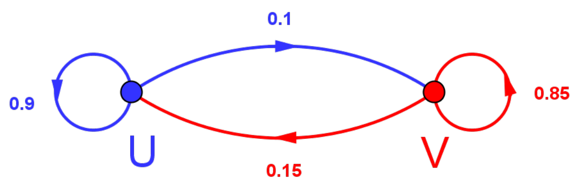
Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur ……….	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	Affecter à U la valeur 0,9 x U + 0,15 x V	L7
	Affecter à V la valeur ………	L8
	Fin Pour	L9
SORTIE :	Afficher U et Afficher V	L10

(Sujet de Bac ES Pondichéry 2013)

CORRECTION

PARTIE A

1 . Il y a deux états U et V
Chaque année l'entreprise U conserve 90 % de ses clients,les autres (10%) choisissent l'entreprise V.
Donc le poids de l'arête **UU est 0,9** et le poids de l'arête **UV est 0,1.**
Chaque année l'entreprise V conserve 85 % de ses clients, les autres (15%) choisissent l'entreprise U.
Donc le poids de l'arête **VV est 0,85** et le poids de l'arête **VU est 0,15.**
On obtient le graphe probabiliste suivant.



2 . Pour tout entier naturel n : $u_n + v_n = 1$
$u_0 = 0,45$ et $\mathbf{v_0 = 1 - 0,45 = 0,55}$
En utilisant l'arbre probabiliste on obtient :
Pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0,9u_n + 0,15v_n$ et $v_{n+1} = 0,1u_n + 0,85v_n$.
Donc $u_1 = 0,9u_0 + 0,15v_0$
$u_1 = 0,9 \times 0,45 + 0,15 \times 0,55$
$u_1 = 0,405 + 0,0825$
$\mathbf{u_1 = 0,4875}$
$v_1 = 0,1u_0 + 0,85v_0$
$v_1 = 0,1 \times 0,45 + 0,85 \times 0,55$
$v_1 = 0,045 + 0,4675$
$\mathbf{v_1 = 0,5125}$
On peut vérifier que :
$u_1 + v_1 = 0,4875 + 0,5125 = 1$

3 . L3 Saisir une valeur pour N
L4 Affecter à U la valeur 0,45
L5 Affecter à V la valeur **0,55**
L6 Pour i allant de jusqu'à N
L7 Affecter à U la valeur 0,9 x U + 0,15 x V
L8 Affecter à V la valeur **1 – U**
L9 Fin pour

Remarque : on ne peut pas écrire en **L8** 0,1 x U + 0,85 x V car la valeur de U utiliser serait celle de la ligne L7

4 . On admet que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$
(remarque : on peut facilement démontrer ce résultat car on a
$u_{n+1} = 0,9u_n + 0,15v_n$ et $u_n + v_n = 1$ soit $v_n = 1 - u_n$
$u_{n+1} = 0,9u_n + 0,15(1 - u_n) = (0,9 - 0,15)u_n + 0,15$
$u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$)
a . Pour tout entier naturel n
$w_n = u_n - 0,6$ donc $u_n = w_n + 0,6$

$w_{n+1} = u_{n+1} - 0{,}6$
$w_{n+1} = 0{,}75u_n + 0{,}15 - 0{,}6$
$w_{n+1} = 0{,}75(w_n + 0{,}6) - 0{,}45$.
$w_{n+1} = 0{,}75u_n + 0{,}45 - 0{,}45$
$w_{n+1} = 0{,}75w_n$
donc **(w_n) est une suite géométrique de raison 0,75**

b . $0 < 0{,}75 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} wn = 0$

et $u_n = w_n + 0{,}6$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} un = 0{,}6$

Dans un avenir lointain l'entreprise U aura 60 % du marché des fontaines d'eau de la ville

PARTIE B

On admet que le triplet (a,b,c) est solution du système (S)

(S) $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ 27a+9b+3c = 17{,}4 \\ 125a+25b+5c = 73 \end{cases}$ et on pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

(remarque : on obtient ce système en écrivant C(1) = 11 et C(3) = 27,4 et C(5) = 83)

1 . a **. On** écrit ce système sous la forme matricielle MX = Y en posant

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 17{,}4 \\ 73 \end{pmatrix}$

b . M est inversible et la calculatrice donne (valeurs approchées à 10^{-2})

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}13 & -0{,}08 & 0{,}03 \\ -1 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ 1{,}88 & -0{,}42 & 0{,}08 \end{pmatrix}$

$MX = Y \Leftrightarrow M^{-1} \times MX = M^{-1} \times Y \Leftrightarrow I \times X = M^{-1} \times Y \Leftrightarrow X = M^{-1} \times Y$

soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}13 & -0{,}08 & 0{,}03 \\ -1 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ 1{,}88 & -0{,}42 & 0{,}08 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 17{,}4 \\ 73 \end{pmatrix}$

La calculatrice donne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

2 . $C(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}1x + 10$ pour $x = 8$ (milliers)
$C(8) = 0{,}5 \times 8^3 + 0{,}4 \times 8^2 + 0{,}1 \times 8 + 10 = 292{,}4$ (centaines d'euros)

Le coût annuel de production pour 8000 recharges d'eau produites est : 29240€