

# Chaînes et cycles d'un graphe

- 1. Définitions. [p2](#)
- 2. Dénombrement de chaînes [p3](#)
- 3. Distance de deux sommets [p5](#)

## 1. Définitions

G est un graphe

### 1.1. Chaîne

Une **chaîne** de G est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.

On considère la figure 3.

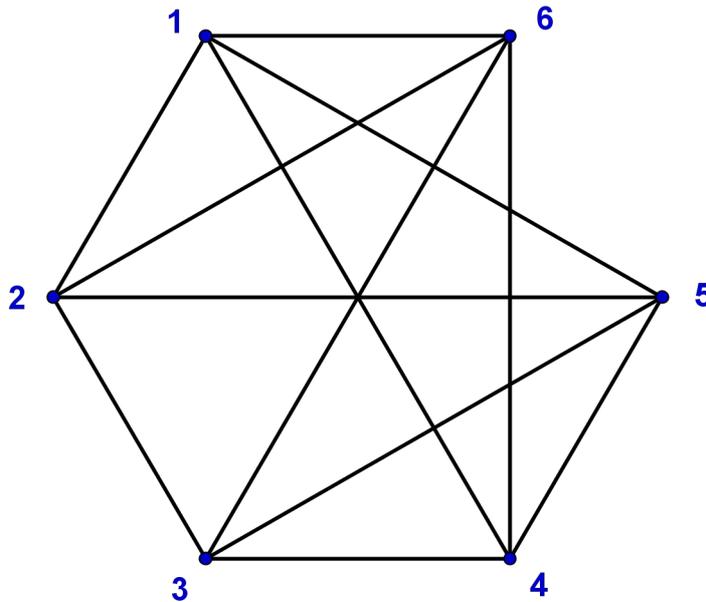


fig 3

#### Exemples de chaînes

123

1264

121

1263261

### 1.2. Longueur

La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.

Pour les exemples précédents

123 longueur : 2.

1264 longueur : 3.

121 longueur : 2.

1263261 longueur : 6.

### 1.3. Chaîne fermée

Une chaîne est **fermée** lorsque l'origine et l'extrémité de la chaîne sont confondues.

#### Exemples

les chaînes 121 ou 1263261 sont ds chaînes fermées.

### 1.4. Cycles

Un **cycle** est une chaîne fermée dont toutes les arêtes sont distinctes.

Exemples

Les deux chaînes fermées données en exemples ne sont pas des cycles.

Par contre 164621 est un cycle.

### 1.5. Graphe connexe

Un graphe est dit **connexe** si et seulement s'il existe toujours une chaîne reliant deux sommets distincts.

Le graphe de la figure 3 est connexe

Exemple de graphe non connexe.

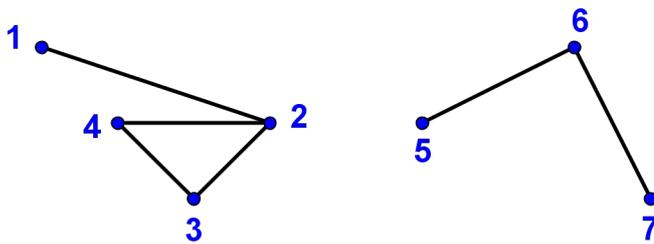


fig 8

Les sommets 1 et 5 ne sont pas reliés par une chaîne.

## 2. Dénombrement de chaînes et puissances de la matrice associée

### 2.1. Exemples

On considère le graphe G suivant.

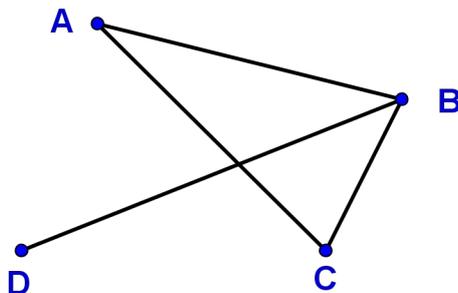


fig 9

L'ordre du graphe est 4 (il y a 4 sommets)

Le degré de A est 2.

Le degré de B est 3.

Le degré de C est 2.

Le degré de D est 1.

On dénombre les chaînes de longueur 2 du graphe G.

- . De A vers A : **2** ABA et ACA
- . De A vers B : **1** ACB
- . De A vers C : **1** ABC

- . De A vers D : **1** ABD
- . De B vers A : **1** BCA
- . De B vers B : **3** BAB et BCB et BDB
- . De B vers C : **1** BAC
- . De B vers D : **0** Il n'existe pas de chaîne de longueur 2 reliant B à D.
- . De C vers A : **1** CBA
- . De C vers B : **1** CAB
- . De C vers C : **2** CAC et CBC
- . De C vers D : **1** CBD
- . De D vers A : **1** DBA
- . De D vers B : **0**
- . De D vers C : **1** DBC
- . De D vers D : **1** DBD

On numérote les sommets en respectant l'ordre alphabétique (A:1, B:2, C:3, D:4).

La matrice associée au graphe est  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En utilisant la calculatrice, on calcule  $M^2$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que le coefficient  $a_{ij}$  est le nombre de chaînes de longueur 2 reliant  $i$  et  $j$ .

On dénombre les chaînes de longueur 3 du graphe G.

- . De A vers A : **2** ABCA et ACBA
- . De A vers B : **4** ABCB et ABAB et ACAB et ABDB
- . De A vers C : **3** ACBC et ABAC et ACAC
- . De A vers D : **1** ACBD
- . De B vers A : **4** BCBA et BABA et BACA et BDBA
- . De B vers B : **2** BACB et BCAB
- . De B vers C : **4** BCBC et BABC et BDBC et BCAC
- . De B vers D : **3** BDBD et BCB D et BABD
- . De C vers A : **3** CBCA et CABA et CACA
- . De C vers B : **4** CBCB et CBAB et CBDB et CACB
- . De C vers C : **2** CABC et CBAC
- . De C vers D : **1** CABD
- . De D vers A : **1** DBCA

- . De D vers B : **3** DBDB et DBCB et DBAB
- . De D vers C : **1** DBAC
- . De D vers D : **0**

En utilisant la calculatrice, on calcule  $M^3$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que le coefficient  $a_{ij}$  est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant  $i$  à  $j$ .

## 2.2. Propriété (admise)

Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  ( $n$  entier naturel non nul)

$M$  est la matrice carrée d'ordre  $n$  associée au graphe  $G$ .

$k$  est un entier naturel non nul.

Le nombre  $a_{ij}$  de la matrice  $M^k$  est le nombre de chaînes de longueur  $k$  reliant  $i$  à  $j$ .

## 2.3. Distance de deux sommets

$G$  est un graphe connexe

- . **La distance** entre deux sommets de  $G$  est la longueur **minimale** des chaînes reliant ces deux sommets.
- . **Le diamètre** de  $G$  est la plus grande distance entre les sommets.