Coloration d'un graphe

1. Activité p2
2. Définitions p3
3. Propriétés p3
4. Algorithme de coloriage p3
5. Exercice p4

Remarque :
Cette leçon n'est plus au progamme de TES.

1. Activité

Pour une coupe du monde de football, les équipes qualifiées sont réparties en « poule » de quatre équipes.

Chaque équipe rencontre une et une seule fois les trois autres.

Toutes les équipes de la même poule, jouent le même jour un match et un seul.

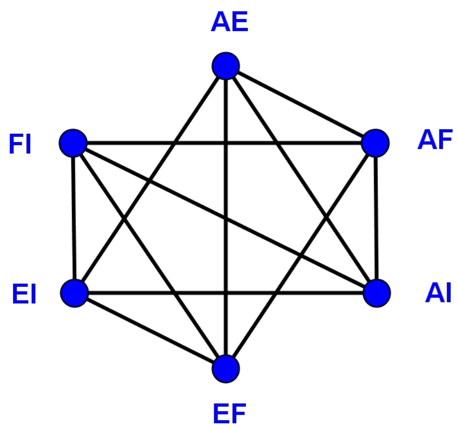
On suppose que dans l'une des poules les équipes qualifiées sont :

A : Angleterre E : Espagne F : France I : Italie

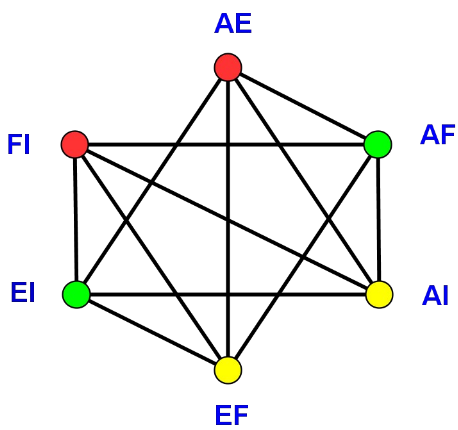
On notera les six matchs de la poule :

AE (Angleterre;Espagne) ; AI ; AF;EF ; EI; FI .

On considère le graphe suivant, les six sommets sont les six matchs, il ya une arête entre deux sommets si et seulement si les deux matchs ne peuvent pas être joués le même jour.



L'ordre du graphe est 6.
Le degré de chaque sommet est 4.
On se propose de colorier les sommets de ce graphe de façon que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes.
On commence par le sommet AE que l'on colorie en rouge (par exemple).
Les sommets : AF;AI;EF et EI sont adjacents donc on ne peut pas les colorier en rouge.
Par contre le sommet FI peut être colorier en rouge.
Puis on choisit le sommet AF que l'on colorie en vert (par exemple).
Les sommets AI et EF sont non coloriés et adjacrnts donc on ne peut pas les colorier en vert.
Par contre le sommet EI n'est pas colorié et n'est pas adjacent donc peut être colorié en vert.
Puis on choisit le sommet AI que l'on colorie en jaune (par exemple).
Le seul sommet non encore colorié EF n'est pas adjacent à AI donc on le colorie en jaune.



Remarques

. Nous avons utilisé trois couleurs.
Par exemple
En rouge les deux matchs de la première journée : AE et FI.
En vert les deux matchs de la deuxième journée : AF et EI.
En jaune les deux matchs de la troisième journée : AI et EF.

. Lorsqu'on regarde le graphe, il existe des sous graphes d'ordre trois (tout simplement des triangles) donc il est nécessaire d'utiliser au moins trois couleurs distinctes pour le graphe donc 3 est le nombre minimal de couleurs que l'on puisse utiliser pour colorier le graphe.
On dit que 3 est le **nombre chromatique** du graphe.

2. Définitions

. Colorier un graphe consiste à affecter une couleur à chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

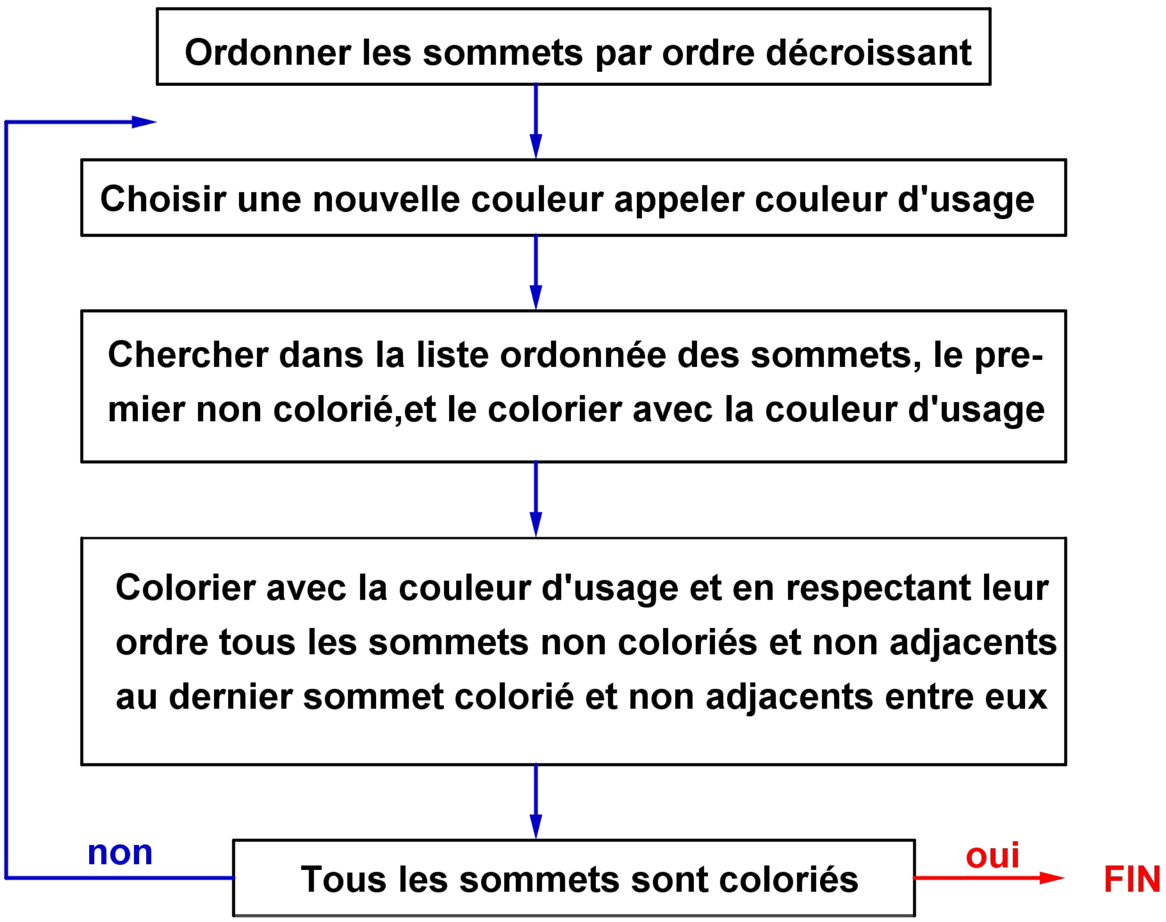
. Le nombre chromatique est le plus petit nombre ce couleurs nécessaires à son coloriage.

3. Propriétés

. Si le graphe G admet un sous graphe **complet** d'odre 3 ou 4 . . . alors le nombre chromatique est supérieur ou égal à 3 ou 4 . . .donc si m est l'ordre le plus grand des sous graphes complets du graphe G, alors le nombre chromatique de G est supérieur ou égal à m.

. Si Δ est le plus grand degré des sommets de G alors le nombre chromatique de ce graphe est inférieur ou égal à $\Delta+1$ (propriété admise).

4. Algorithme de coloriage



(Agorithme deWelch - Powell)

Remarques

. Pour la la première consigne

On établit une liste ordonnéede sommets par ordre des degrés décroissants en cas d'égalité de degré le choix est arbitraire (donc il n'y a pas unicité de la liste).

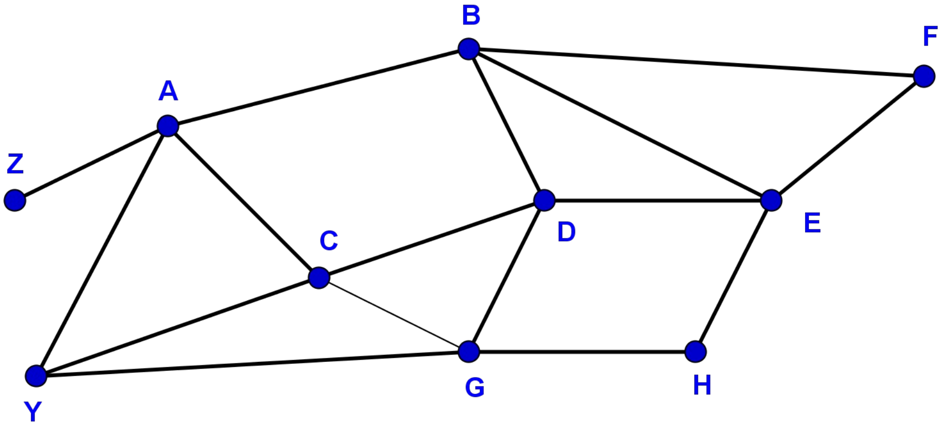
. Pour la deuxième consigne

On peut aussi établir une liste ordonnée de couleurs.

. Avec cet algorithme on n'obtient pas nécessairement le nombre minimal de couleurs donc le nombre chromatique est inférieur ou égal au nombre de couleurs obtenues avec l'algorithme.

5. Exercice

(D'après sujet de bac. Liban 2007)



On considère le graphe ci-dessus.

1.a. Ce graphe est-il connexe ?

b. Déterminer le degré de chacun des sommets.

On pourra donner le résultat sous forme de tableau.

c. Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.

2.a. Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.

b. Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3.

CORRECTION

1.a. Pour toutes les paires de sommets il existe une chaîne reliant les deux points donc le graphe est connexe.

b.

A	B	C	D	E	F	G	H	Y	Z
4	4	4	4	4	2	4	2	3	1

c. Pour le graphe ilya deux (et deux seulement) sommets qui ont un degré impair donc le théorème d'Euler nous permet d'affirmer qu'il existe une au moins une chaîne eulérienne (on ne demande pas de donner un exemple).

2.a. Δ est le plus grand degré des sommets du graphe.

$\Delta=4$ et $\Delta+1=5$.

Il existe des sous graphes complets d'ordre 3 et il n'existe pas de sous graphes complets d'ordre 4 contenus dans ce graphe. Donc $m=3$;

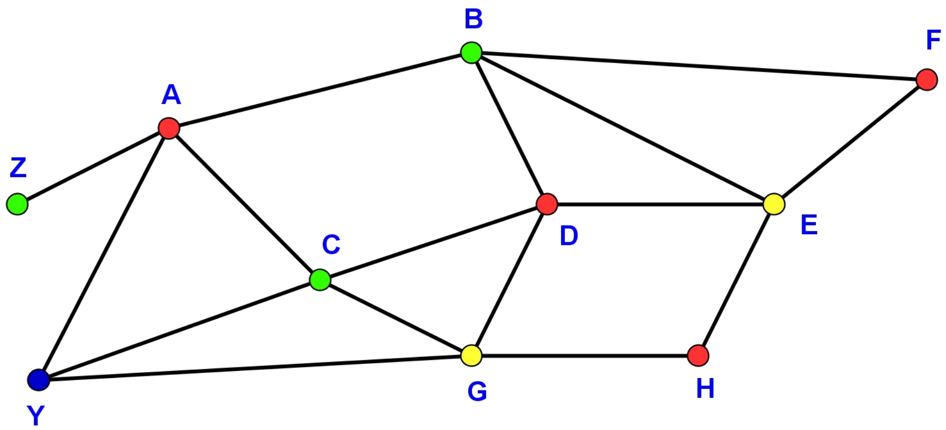
Conséquence

Le nombre chromatique est donc compris entre 3 et 5 .

b. Pour colorier le grphe on utilise l'algorithme précédent.

Liste des sommets : **A ; B ; C ; D ; E ; G ; Y ; F ; H ; Z**

Liste des couleurs : **Rouge ; Vert ; Jaune ; Bleu**



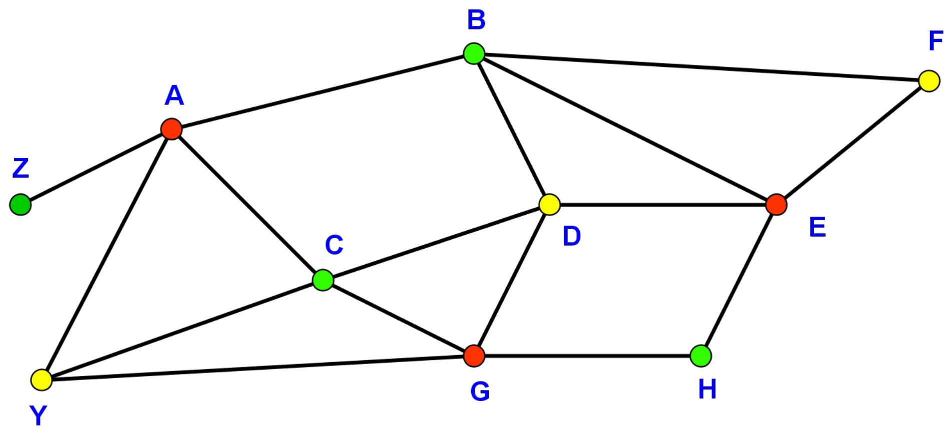
Nous avons utilisé quatre couleurs, donc nous pouvons affirmer que le nombre chromatique est compris entre 3 et 4 mais nous ne pouvons pas affirmer que le nombre chromatique est 4.

Remarque

Si on change l'ordre de la liste des sommets (on permute C et G)

Liste des sommets : A ; **B ; G ; D ; E ; C ; Y ; F ; H ; Z**

Liste des couleurs : **Rouge ; Vert ; Jaune**



Nous avons utilisé 3 couleurs donc le nombre chromatique de ce graphe est 3.