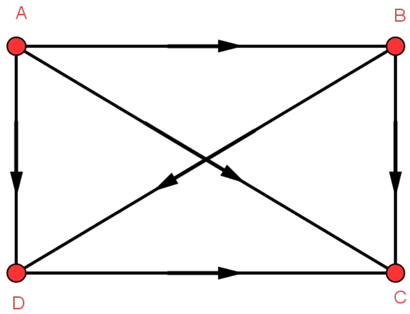
# Graphes Orientés

## 1. Définitions

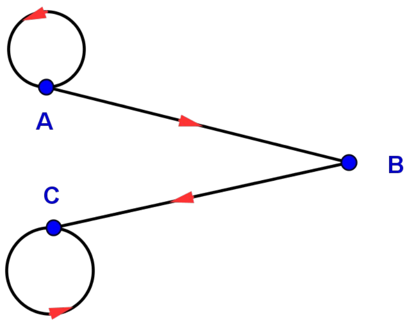
. Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées (c'est à dire : on ne peut parcourir les arêtes que dans un sens).

Exemple :




. Une **boucle** est une arête orientée dont l'origine et l'extrémité sont confondues.

Exemple




. **Matrice associée à une graphe orienté**

On numérote les sommets suivant l'ordre alphabétique .

Pour le premier exemple :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{12}=1$ $1^{\text{ère}}$ ligne et $2^{\text{ème}}$ colonne

car il y a une arête orientée de A vers B

$a_{21}=0$ $2^{\text{ème}}$ ligne et $1^{\text{ère}}$ colonne

car il n'existe pas d'arête orientée de B vers A.

La matrice associée à un graphe orienté n'est pas nécessairement symétrique.

Pour le deuxième exemple

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2. Exercice 1

Un club de tennis doit sélectionner deux joueurs parmi quatre pour représenter le club à un tournoi régional.

Les quatre joueurs sont notés : A ; B ; C et D.

Pour réaliser la sélection le club organise des matchs : chaque joueur rencontre les trois autres.

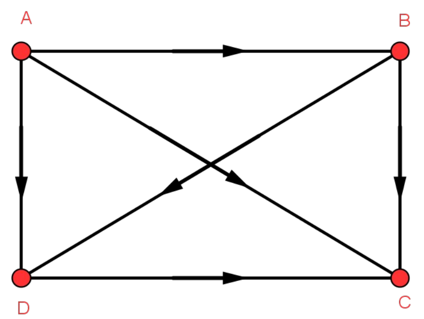
Tout match gagné donne un point, tout match perdu enlève un point.

Les joueurs sélectionnés sont les joueurs ayant obtenus le plus grand nombre de points.

On donne le résultat sous la forme d'un graphe orienté.

<u>Remarque :</u>

Une flèche orientée de A vers B indique que le joueur A a battu le joueur B.




<u>Conséquence</u>

Le joueur A a gagné 3 matchs donc 3 points.

Le joueur B a gagné 2 matchs et perdu 1 match donc 1 point.

Le joueur C a perdu 3 matchs donc -3 points.

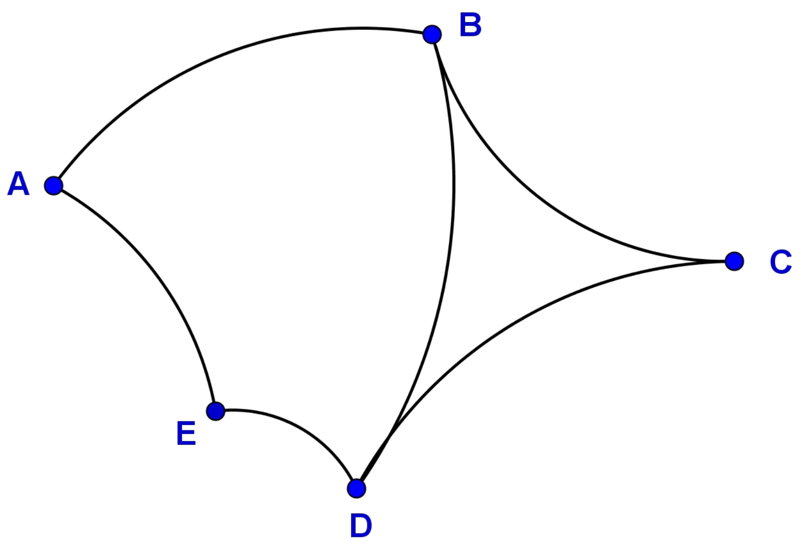
Le joueur D a gagné 1 match et perdu 2 matchs donc -1 point.

Les joueurs A et B sont donc sélectionnés.

## 3. Exercice 2 *( sujet bac Liban mai 2006)*

**1.** Dans un parc, il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées.

On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D,E et les allées par les arêtes du graphe G ci-dessous :




**Graphe G**

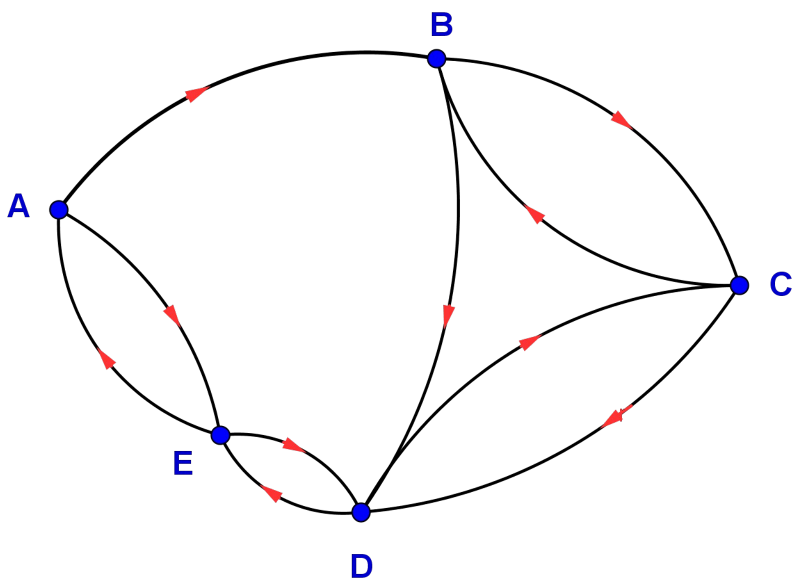
**a.** On désire peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes.

Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires et justifier.

Déterminer ce nombre.

**b.** Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?

**2.** Une exposition est organisée dans le parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation : certaines allées deviennent à sens unique, d'autre reste à double sens. Par exemple la circulation dans l'allée située entre les bancs B et C pourra se faire de B vers C et de C vers B, alors que la circulation dans l'allée située entre les bancs A et B ne porra se faire que de A vers B. le graphe G' ci-dessous modélise cette nouvelle situation :




**Graphe G'**

**a.** Donner la matrice M associée au graphe G'. (On ordonnera les sommets par ordre alphabétique).

**b.** On donne $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

Combien ya-t-il de chemins de longuer 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B ?

Les donner tous.

**c.** Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par A.

Quel est ce cycle ?

En est-il de même pour le sommet B ?

**<u>CORRECTION</u>**

**1.** Les sommets B et D sont de degré 3 et les sommets A, C et E sont de degré 2.

$\Delta = 3$

Le nombre chromatique est inférieur ou égal à $\Delta + 1 = 4$ .

Si on considère le sous graphe B ; C ; D, ce sous graphe est complet, donc le nombre chromatique est supérieur ou égal à 3.

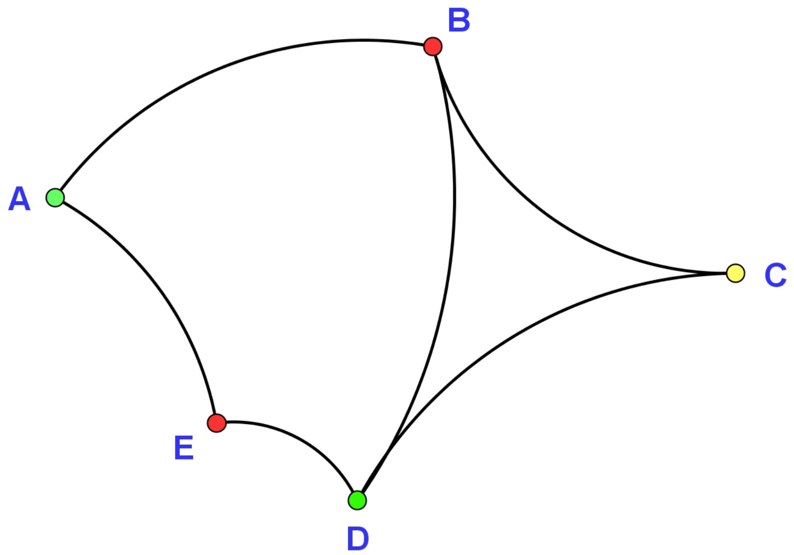
<u>Conclusion</u>

Le nombre chromatique est compris entre 3 et 4.

Pour le déterminer, on colorie le graphe G en utilisant l'algorithme de coloration.

Liste ordonnée des sommets : **B ; D ; A ; C ; E**

Liste ordonnée des couleurs : **Rouge ; Vert ; Jaune . . .**




On a déterminé une coloration du graphe contenant 3 couleurs, donc **le nombre chromatique est égal à 3.**

**b.** Il y a deux et seulement 2 sommets de degré impair, le théorème d'Euler permet d'affirmer qu'il existe au moins une chaîne eulérienne c'est à dire on peut parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée.

Exemple de chaîne eulérienne : **BDEABCD.**

**2.a.** $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**b.** Le cefficient $a_{42}=5$ dans $M^5$ donc il y a 5 chemins de longueur 5 reliant D en B.

**DEDEAB** **DEAEAB** **DCDEAB** **DCBDCB** **DEABCB**

**c.** Le coefficient $a_{11}=1$ dans $M^5$ donc il y a une seule chaîne fermée de longueur 5 d'origine et d'extrémité A.

On détermine cette chaîne **ABCDEA** et cette chaîne est un cycle de longueur 5.

Remarque

Tout cycle de longueur 5 passant par A est une chaîne fermée de longueur 5 d'origine et d'extrémité A.

Conclusion

Il existe **un seul cycle** de longueue 5 passant par A.

Le coefficient $a_{22}=5$ dans $M^5$ donc il existe 5 chaînes fermées de longueur 5 d'origine et d'extrémité B.

On détermine ces 5 chaînes.

**BCDEAB** cette chaîne est un cycle.

**BCBDCB** cette chaîne n'est pas un cycle, elle contient deux fois l'arête CB.

**BDEDCB** cette chaîne est un cycle .

**BDCDCB** cette chaîne n'est pas un cycle, elle contient deux fois l'arête DC.

**BDCBCB** cette chaîne n'est pas un cycle, elle contient deux fois l'arêteCB.

Conclusion

Il existe **deux cycles** de longueur 5 passant par B.