Graphes pondérés

1. Définition

On nomme graphe pondéré tout graphe étiqueté tel que toutes les étiquettes sont des nombres positifs.

Exemple : pour un graphe représentant une carte routière on peut considérer pour étiquettes les distances en km ou le temps en heures ou minutes ou le prix des péages en euros.

2. Remarques

. Le nombre positif affecté à une arête (ou un arc) se nomme **poids** de cet arête (ou de cet arc).

. Le poids d'une chaîne (ou d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (ou des arcs) qui la composent.

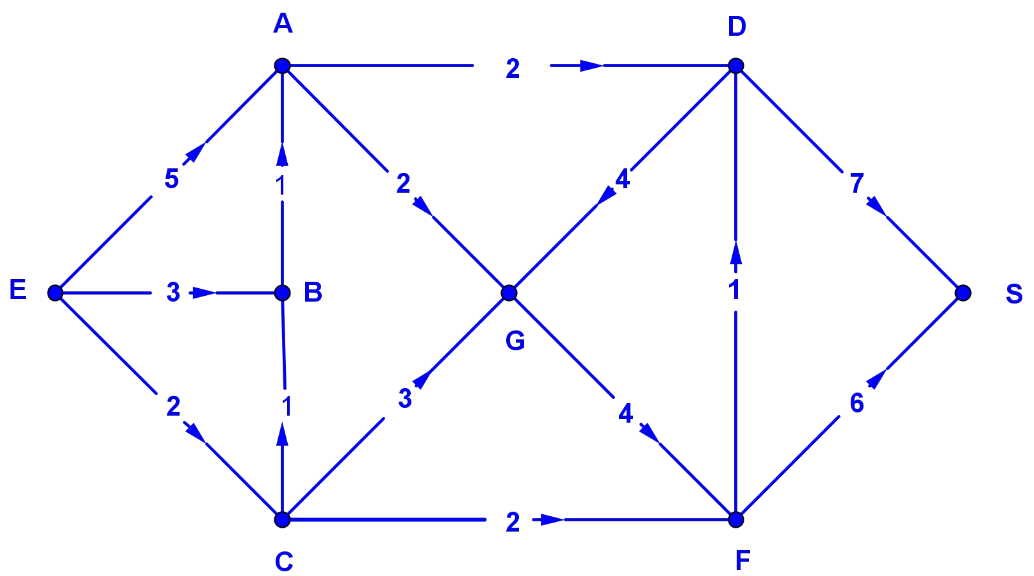
. **Une plus courte chaîne (ou plus cours chemin)** entre deux sommets est parmi les chaînes (ou les chemins) qui relient ces deux sommets une chaîne de poids minimal.

3. Exemple

On choisit comme exemple le document d'accompagnement du programme de TES en 2002.

Le graphe suivant représente le réseau routier d'une région qui prend en compte le sens de circulation, chaque arc (ou arête) représente une à sens unique dont le poids est la distance en kilomètres entre deux sommets.

Quel est l'itinéraire le plus court qui relie E à S.



4. Algorithme de DIJKSTRA

4.1. Principe

. Si $s_1 s_2 s_3 \dots s_p$ (avec p entier naturel non nul) est un plus court chemin reliant s_1 à s_p alors pour tout entier i compris entre 1 et p, $s_1 s_2 \dots s_i$ est un plus court chemin reliant s_1 à s_i. Donc on détermine de proche en proche les chemins minimaux reliant s_1 aux autres sommets jusque s_p.

. Chaque itération de l'algorithme de DIJKSTRA permet de remplir une ligne d'un tableau dont la dernière ligne donnera un chemin minimal.

4.2. Algorithme

<u>Étape 1</u> (initialisation)

. Dans la première ligne du tableau on écrit tous les sommets du graphe.

(L'ordre des sommets est arbitraire. Ici pour l'exemple on place en premier le sommet initial et en dernier le sommet final entre eux les sommets sont placés par ordre alphabétique).

. Dans la deuxième ligne on écrit sous le point initial : 0, sous les autres sommets on écrit : ∞ (correspondant au poids affecté aux sommets).

<u>Étape 2</u>

. Choisir parmi les sommets (non encore marqués) un sommet X de poids minimal (si plusieurs sommets ont le même poids minimal alors le choix parmi ces sommets est arbitraire).

. Dans la nouvelle ligne et dans la colonne X, on marque définitivement ce poids minimal et après cette case de la colone on n'écrira plus rien (pour l'exemple on mettra en couleur les cases suivantes).

<u>Étape 3</u>

Pour tous les sommets Y adjacents à X qui ne sont pas définitivement marqués, on calcule la somme σ du poids du poids de X et du poids de l'arête (ou de l'arc) reliant X à Y.

. Si cette somme σ est strictement inférieure au poids de Y alors on écrit dans la case de la ligne et de la colonne Y comme poids la somme obtenue σ et on notera $\sigma(X)$.

. Sinon, on écrit dans cette case le poids précédent.

<u>Étape 4</u>

. S'il reste des sommets non marqués définitivement alors **<u>on repart à l'étape 2.</u>**

. Sinon on passe à l'étape 5.

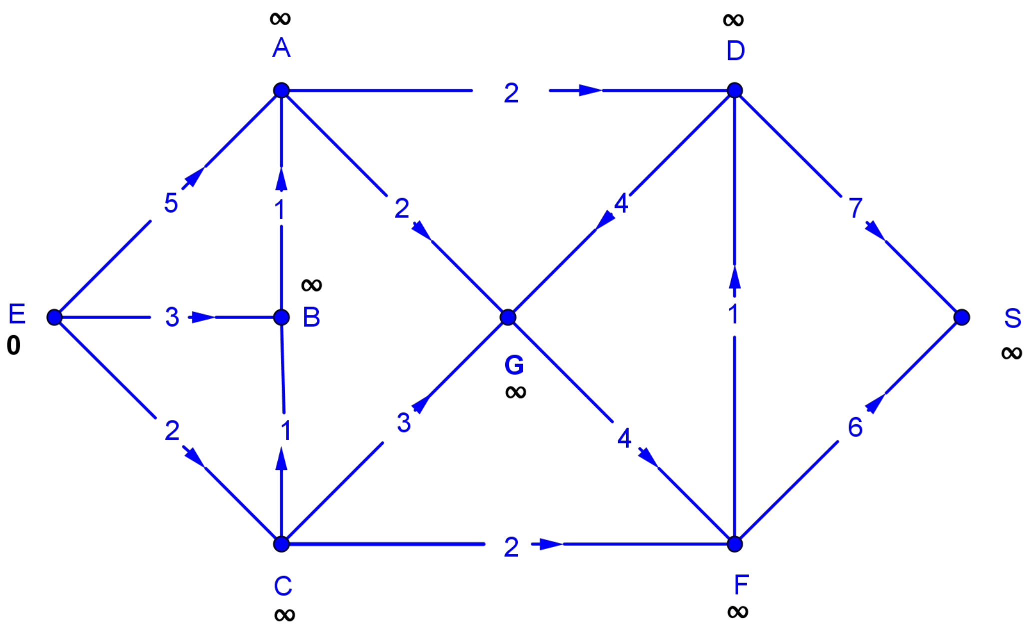
<u>étape 5</u>

On obtient le poids du plus court chemin dans la dernière ligne. Puis on détermine le plus court chemin obtenu.

5.3. Retour à l'exemple

<u>Étape 1</u> (initialisation)

E	A	B	C	D	F	G	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞



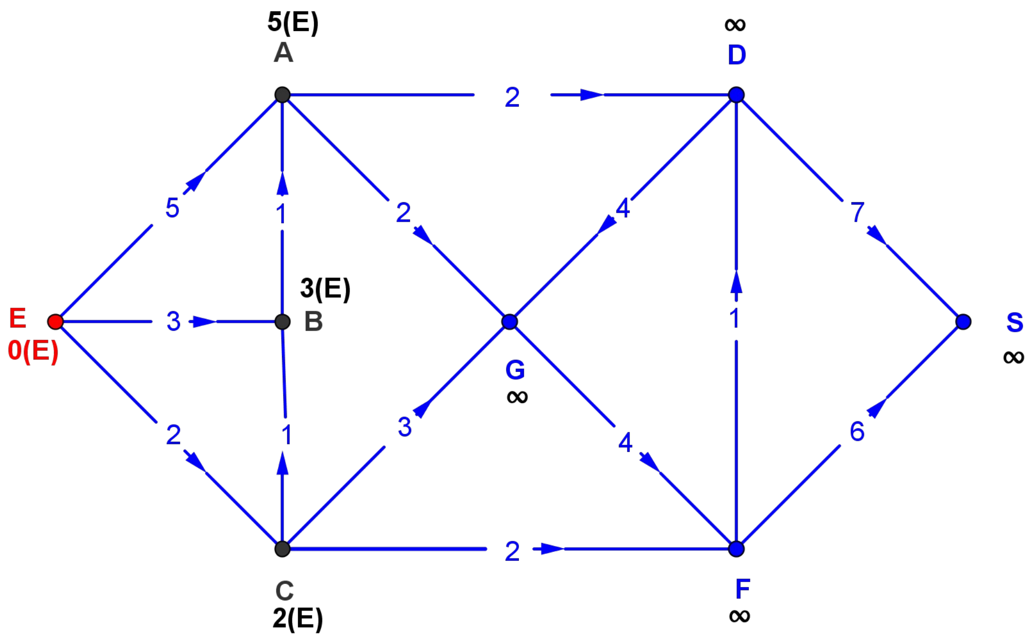
. 1ère **itération**

On marque définitivement E : **0(E)**

On marque provisoirement les trois sommets adjacents de E : A, B et C ;

A ; 5(E) $(<\infty)$ B : 3(E) $(<\infty)$ C : 2(E) $(<\infty)$

E	A	B	C	D	F	G	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞



. 2ème **itération**

On marque définitivement C : **2(E).**

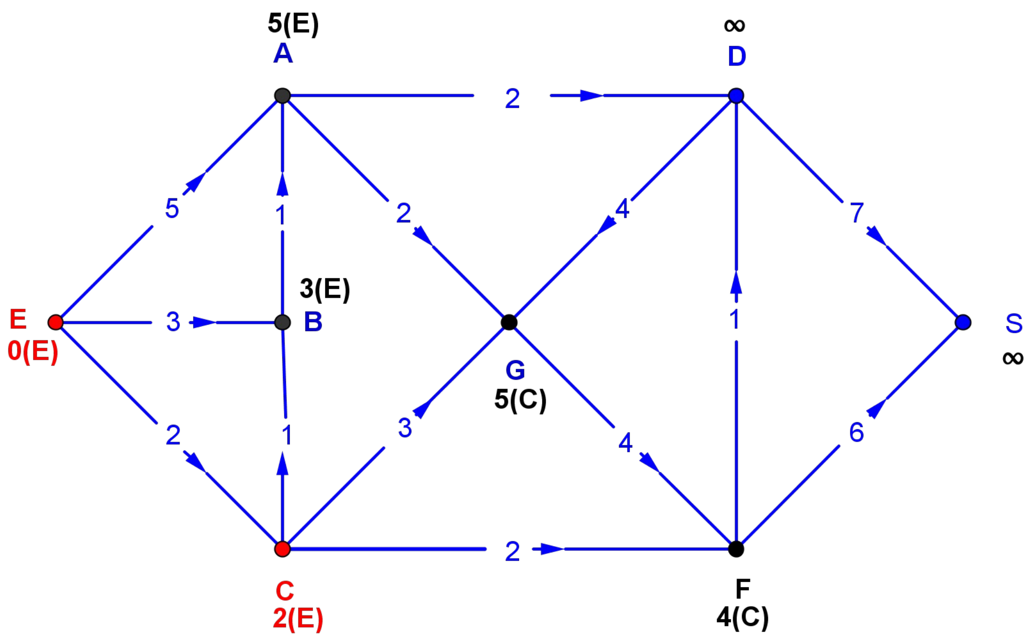
Les sommets adjacents à C (non définitivemnt marqués) sont : B, G et F.

Pour B : $\sigma=2+1=3$ (or on a 3(E)). Il existe deux chemins les plus courts reliant E à B. les chemins : EB et ECB donc on pourrait écrire 3(C).

Pour G : $\sigma=2+3=5$, on note provisoirement 5(C).

Pour F : $\sigma=2+2=4$, on note provisoirement 4(C).

E	A	B	C	D	F	G	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞
	5(E)	3(E)	2(E)	∞	4(C)	5(C)	∞



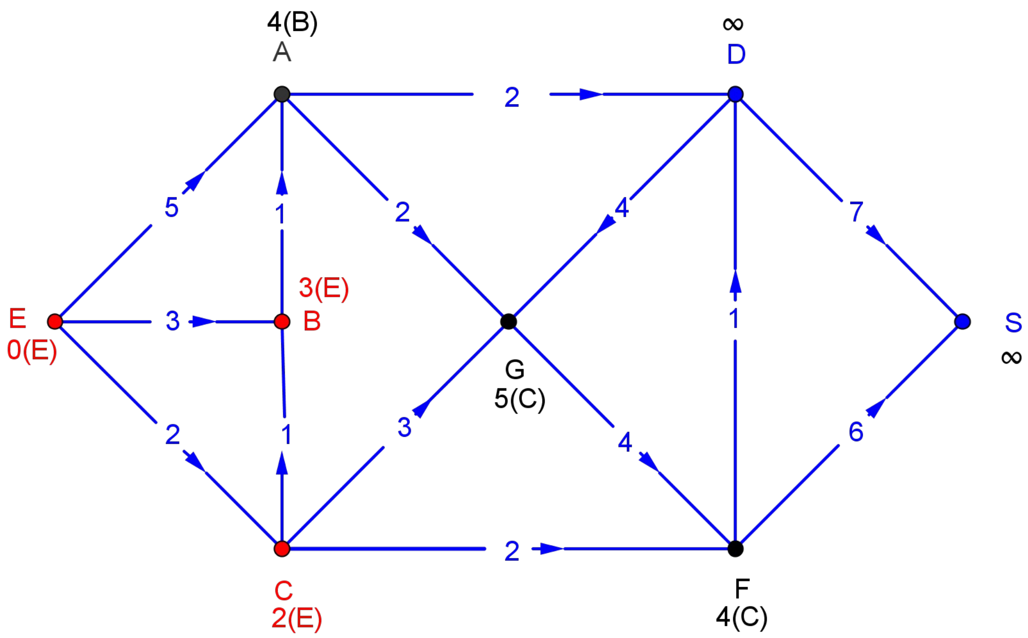
- $3^{\text{ème}}$ **itération**

On marque définitivement B **3(E).**

Le seul sommet adjacent à B (non définitivement marqué) est A, $\sigma=3+1=4<5$.

On écrit provisoirement pour A : 4(B).

E	A	B	C	D	F	G	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞
	5(E)	3(E)	2(E)	∞	4(C)	5(C)	∞
	4(E)	3(E)		∞	4(C)	5(C)	∞



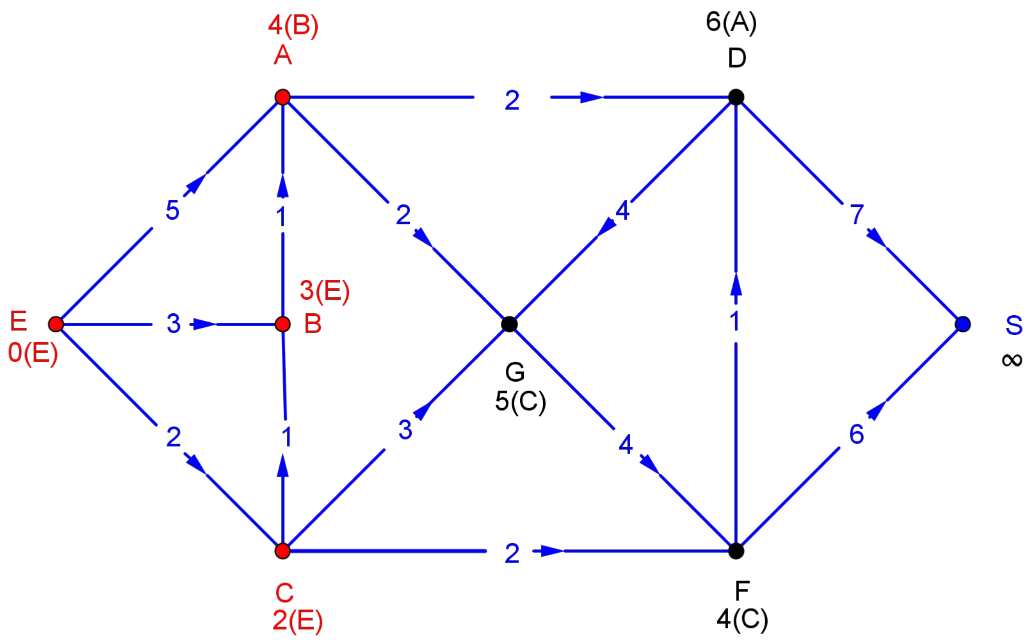
- $4^{ème}$ **<u>itération</u>**

On choisit le sommet A (on pourrait choisir le point F). On marque définitivement le sommet A : **4(B).** Les sommets adjacents à A (non définitivement marqués) sont D et G.

Pour D : $\sigma=4+2=5$. On écrit provisoirement D : 6(A).

Pour G $\sigma=4+2=6>5$. On conserve pour G : 5(C).

E	A	B	C	D	F	G	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞
	5(E)	3(E)	2(E)	∞	4(C)	5(C)	∞
	4(E)	3(E)		∞	4(C)	5(C)	∞
	4(B)			6(A)	4(C)	5(C)	∞



. 5^ème^ **itération**

On marque définitivement F : **4(C)**.

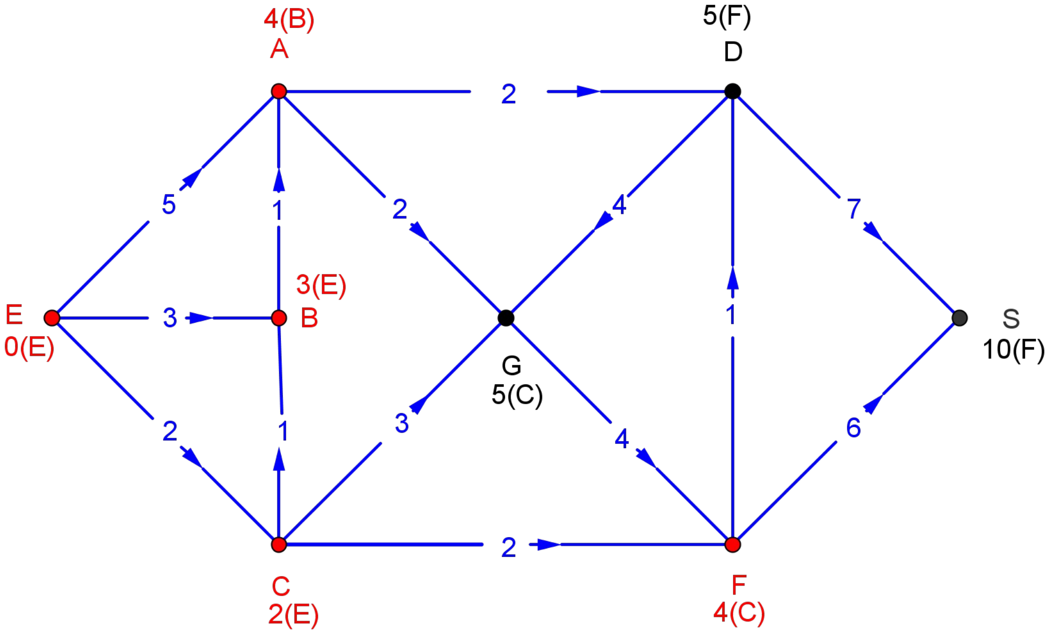
Les sommets adjacents à F (non définitivement marqués) sont G, D et S.

Pour G, $\sigma=4+4=8>5$. On conserve pour G : 5(C).

Pour D, $4+1=5<6$. On écrit pour D : 5(F).

Pour S, $4+6=10$. On écrit pour S : 10(S).

E	A	B	C	D	F	G	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞
	5(E)	3(E)	2(E)	∞	4(C)	5(C)	∞
	4(E)	3(E)		∞	4(C)	5(C)	∞
	4(B)			6(A)	4(C)	5(C)	∞
				5(F)	4(C)	5(C)	10(F)

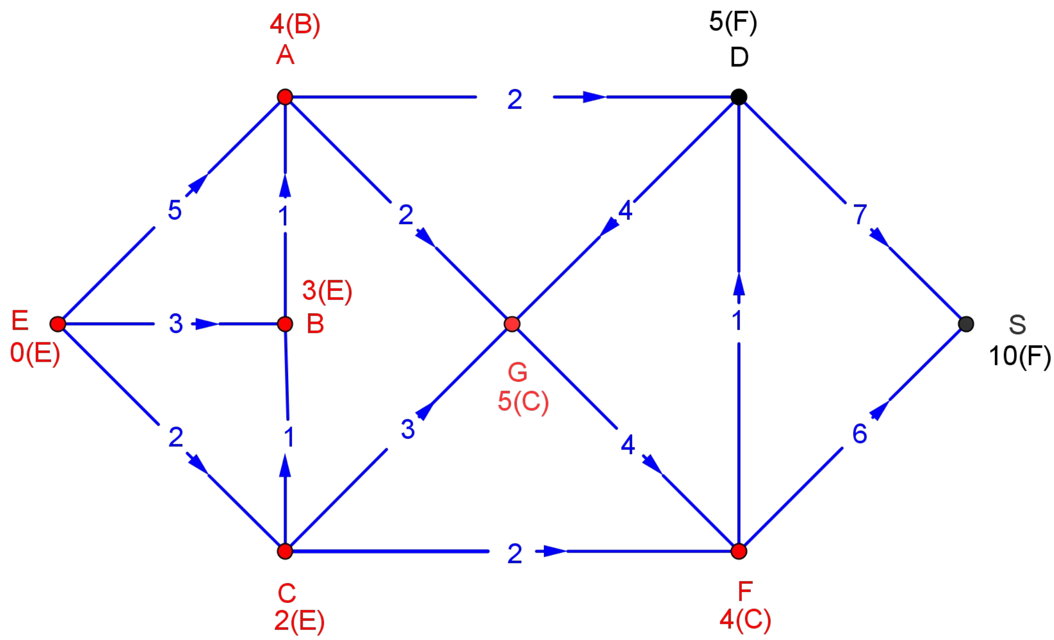


- $6^{ème}$ **<u>itération</u>**

On marque définitivement le sommet G : **5(C)** (on peut aussi choisir le pointD).

Le seul sommet adjacent au sommet G (non marqué définitivement) est D : $\sigma=5+4=9>5$, on conserve donc 5(F).

E	A	B	C	D	F	G	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞
	5(E)	3(E)	2(E)	∞	4(C)	5(C)	∞
	4(E)	3(E)		∞	4(C)	5(C)	∞
	4(B)			6(A)	4(C)	5(C)	∞
				5(F)	4(C)	5(C)	10(F)
				5(F)		5(C)	10(F)

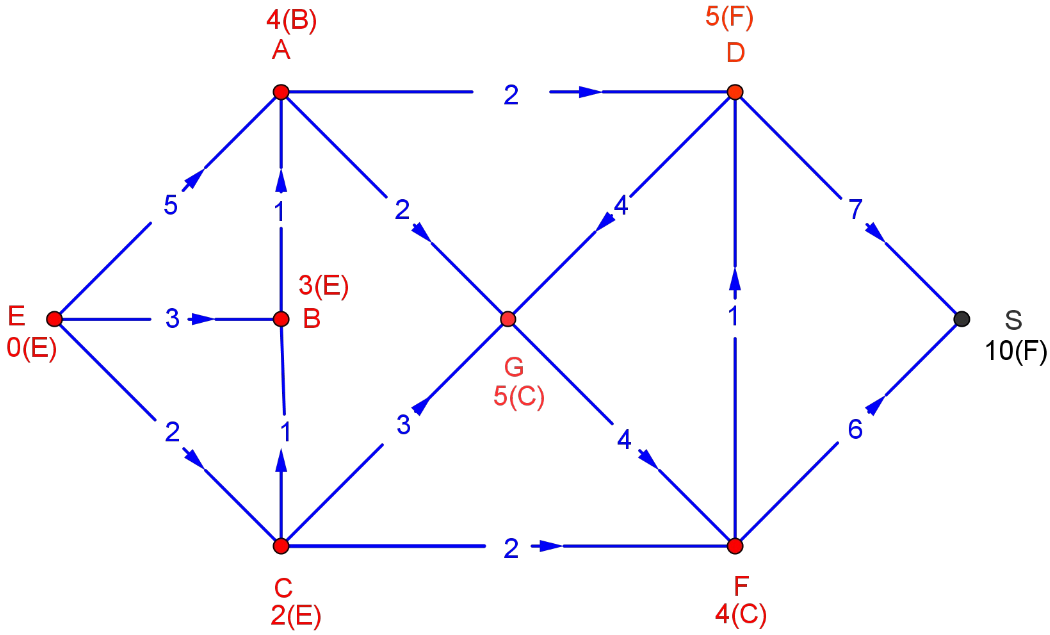


. $7^{\text{ème}}$ **itération**

On marque définitivement D : **5(F).**

Le seul sommet adjacent à D (non définitivement marqué) pour S : $\sigma=5+7=12>12$, on conserve donc 10(F).

E	A	B	C	D	F	G	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞
	5(E)	3(E)	2(E)	∞	4(C)	5(C)	∞
	4(E)	3(E)		∞	4(C)	5(C)	∞
	4(B)			6(A)	4(C)	5(C)	∞
				5(F)	4(C)	5(C)	10(F)
				5(F)		5(C)	10(F)
				5(F)			10(F)

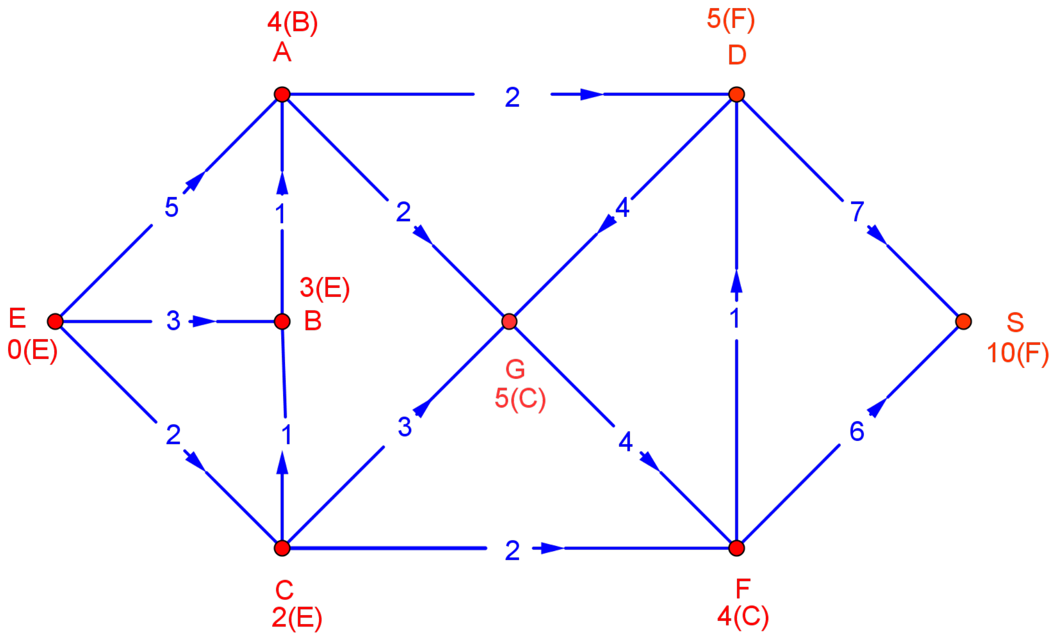


. 8$^{\text{ème}}$ **itération**

On marque définitivement S : **10(F).**

Tous les sommets sont marqués définitivement.

E	A	B	C	D	F	G	S
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(E)	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞
	5(E)	3(E)	2(E)	∞	4(C)	5(C)	∞
	4(E)	3(E)		∞	4(C)	5(C)	∞
	4(B)			6(A)	4(C)	5(C)	∞
				5(F)	4(C)	5(C)	10(F)
				5(F)		5(C)	10(F)
				5(F)			10(F)
							10(F)



. **<u>Dernière étape</u>**

le poids du plus court chemin relliant E à S est 10.

Dans la clonne S on a 10(F). On regarde dans la colonne F, on a : 4(C), on regarde dans la colonne C, on a 2(E), E est le point initial.

Un plus court chemin reliant E à S est ECFS.