Graphes probabilistes

1. Introduction

1.1. Exemple 1

(D'après le sujet Bac TES Métropole juin 2008)

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.

Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.

L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.

Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un ou l'autre de ces deux produits.

On début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes des personnes préférant Boréale change d'avis une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogées au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère boréale la semaine n.

Remarques :

. Pour chaque semaine il y a deux issues A et B.

. Pour tout entier naturel n, on note :

A_n l'événement : « la personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n ».

B_n l'événement : « la personne interrogée au hasard préfère Boréale la semaine n ».

$P(A_n)=a_n \qquad P(B_n)=b_n \qquad P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$

Chaque semaine : « il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un ou l'autre de ces deux produits ». Donc $a_n+b_n=1$.

. Au début de la campagne (pour $n=0$)

20 % des personnes préfèrent Aurore donc 80 % préfèrent Boréale.

$P(A_0)=0{,}2 \qquad P(B_0)=0{,}8 \qquad P_0=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$

. 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

Donc pour tout entier naturel n :

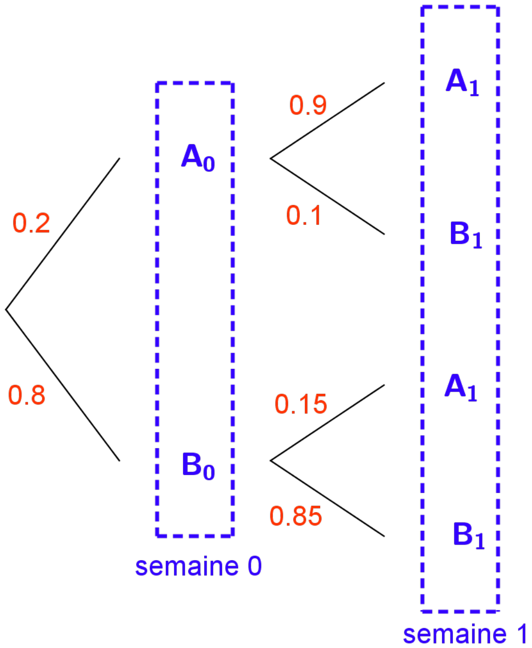
$P_{A_n}(B_{n+1})=0{,}1 \qquad P_{B_n}(A_{n+1})=0{,}15$

Conséquence :

$P_{A_n}(A_{n+1})=1-0{,}1=0{,}9$

$P_{B_n}(B_{n+1})=1-0{,}15=0{,}85$

Arbre pondéré



Pour la semaine 1, on calcule a_1 et b_1 en utilisant la formules des probabilités totales (ou en utilisant l'arbre pondéré).

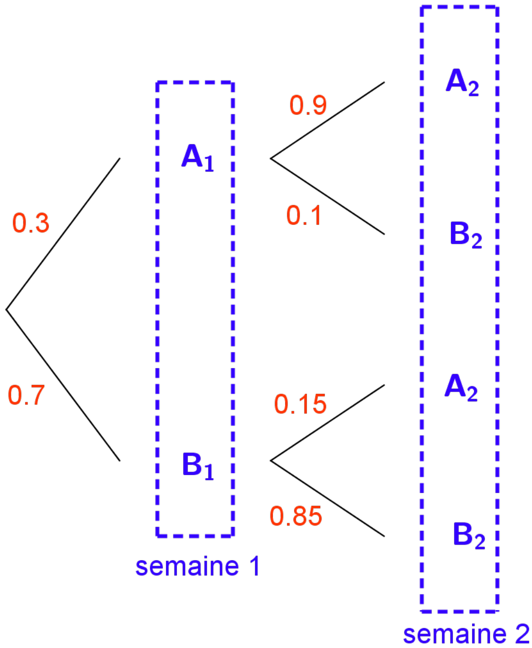
$$a_1=a_0\times P_{A_0}(A_1)+b_0\times P_{B_0}(A_1)=0,2\times0,9+0,8\times0,15=0,18+0,12=0,3$$

$$b_1=a_0\times P_{A_0}(B_1)+b_0\times P_{B_0}(B_1)=0,2\times0,1+0,8\times0,85=0,02+0,68=0,7$$

$$P_1=\begin{pmatrix}0,3 & 0,7\end{pmatrix}.$$

Si on veut déterminer P_2, on peut continuer l'arbre pondéré précédent pour la semaine 2 (mais il serait difficile de continuer l'arbre pondéré pour la semaine 5 par exemple).

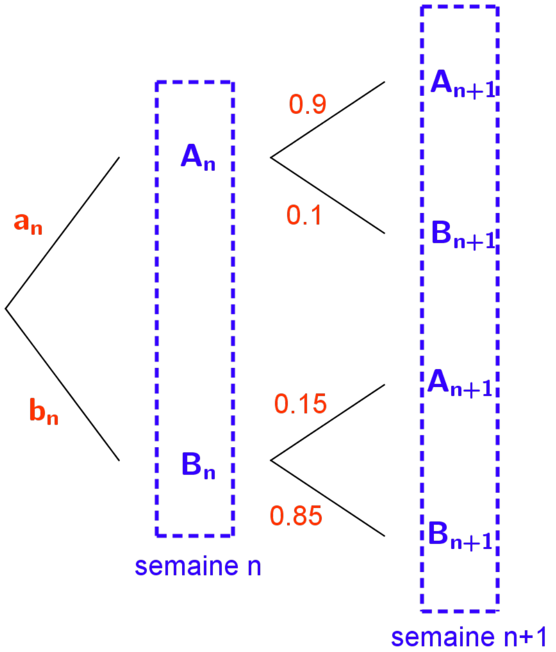
On peut aussi connaissant la semaine1 déterminer la semaine 2 en modifiant les conditions initiales, dans l'arbre pondéré précedent.



$$a_2=a_1\times P_{A_1}(A_2)+b_1\times P_{B_1}(A_2)=0,3\times0,9+0,7\times0,15=0,27+0,105=0,375$$
$$b_2=a_1\times P_{A_1}(B_2)+b_1\times P_{B_1}(B_2)=0,3\times0,1+0,7\times0,85=0,03+0,595=0,625$$

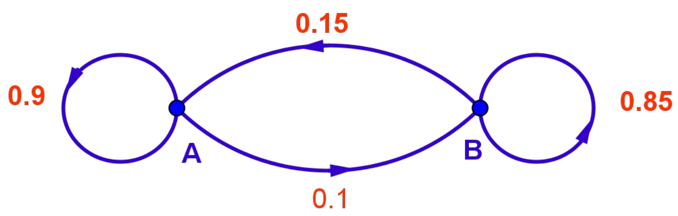
$$P_2=\begin{pmatrix}0,375 & 0,625\end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n, si on veut déterminer P_{n+1} connaissant P_n , on modifie les conditions initiales dans l'arbre pondéré précédent.



$a_{n+1}=a_n\times P_{A_n}(A_{n+1})+b_n\times P_{B_n}(A_{n+1})=a_n\times 0{,}9+b_n\times 0{,}15=0{,}9\,a_n+0{,}15\,b_n$
$b_{n+1}=a_n\times P_{A_n}(A_{n+1})+b_n\times P_{B_n}(A_{n+1})=a_n\times 0{,}1+b_n\times 0{,}85=0{,}1\,a_n+0{,}85\,b_n$

On constate que la partie droite de l'arbre est constante. On peut remplacer l'arbre pondéré par un graphe orienté et pondéré de sommets A et B.



Le poids de l'arête AA (boucle en A) est $0{,}9$ ($=P_{A_n}(A_{n+1})$).
Le poids de l'arête AB est $0{,}1$ ($=P_{A_n}(B_{n+1})$).
La somme des poids des arêtes issues de A est égale à $0{,}9+0{,}1=1$.
Le poids de L'arête BB (boucle en B) est $0{,}85$ ($=P_{B_n}(B_{n+1})$).
Le poids de l'arête BA est $0{,}15$ ($P_{B_n}(A_{n+1})$).
La somme des poids des arêtes issues de B est égale à $0{,}85+0{,}15=1$.

Les sommets sont placés par ordre alphabétique.
On considère la matrice M carrée 2x2 suivante :

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

m_{ij} i : la ligne j : la colonne
m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,9.
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,1.
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,15
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,85.

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

On a : $P_0=(0,2 \quad 0,8)$
On calcule P_0M

$$(0,2 \quad 0,8)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}=(0,2\times 0,9+0,8\times 0,15 \quad 0,2\times 0,1+0,8\times 0,85)=(0,3 \quad 0,7)=P_1$$

$P_0M=P_1$
On calcule P_1M

$$(0,3 \quad 0,7)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}=(0,3\times 0,9+0,7\times 0,15 \quad 0,3\times 0,1+0,7\times 0,85)=(0,375 \quad 0,625)=P_2$$

$P_1M=P_2$
Pour tout entier naturel n
$P_n=(a_n \quad b_n)$ $\qquad P_{n+1}=(a_{n+1} \quad b_{n+1})$
Nous avons déjà calculé a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
On calcule P_nM

$$(a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}=(0,9\,a_n+0,15\,b_n \quad 0,1\,a_n+0,85\,b_n)=(a_{n+1} \quad b_{n+1})=P_{n+1}$$

$P_nM=P_{n+1}$

1.2. Exemple 2

(Sujet Bac TES Amérique du Nord mai 2008)

Pour se rendre à son travail,Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessus :
A chaque intersection :
. Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.
. Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.
. Si le feu est rouge, il le sera à lintersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.
n étant un entier naturel non nul, on note :
. v_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la $n^{\text{ième}}$ intersection.
. o_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange à la $n^{\text{ième}}$ intersection.
. r_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la $n^{\text{ième}}$ intersection.
. $P_n=(v_n \quad o_n \quad r_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste du $n^{\text{iàme}}$ feu tricolore.

1.a. Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.
b. Donner la matrice de transition M complétée de ce graphe :

$$M=\begin{pmatrix} \dots & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & \dots & 0,1 \\ 0045 & \dots & 005 \end{pmatrix}$$

2.a. Si le premier feu rencontré est vert, donnerla matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2 .
b. On donne $P_3=(0,87 \quad 0,05 \quad 0,08)$. Quelle est la probabilité que la quatrième feu soit vert ?

3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2 .

CORRECTION

1.a. On note pour tout entier naturel n :
V_n l'événement : « Mathurin rencontre un feu vert à la $n^{\text{ième}}$ intersection ».
O_n l'événement : « Mathurin rencontre un feu orange à la $n^{\text{ième}}$ intersection ».
R_n l'événement : « Mathurin rencontre un feu rouge à la $n^{\text{ième}}$ intersection ».

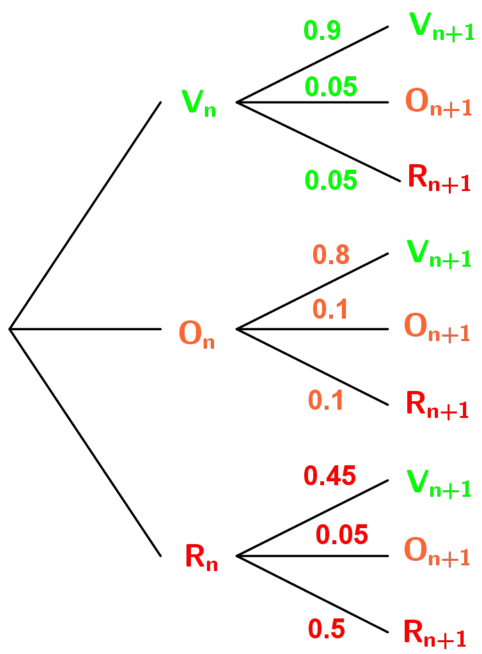
Pour tout entier naturel n,

$P_{V_n}(V_{n+1})=0,9$ et $P_{V_n}(R_{n+1})=0,05$
donc $P_{V_n}(O_{n+1})=1-P_{V_n}(V_{n+1})-P_{V_n}(R_{n+1})=1-0,9-0,05=0,05$

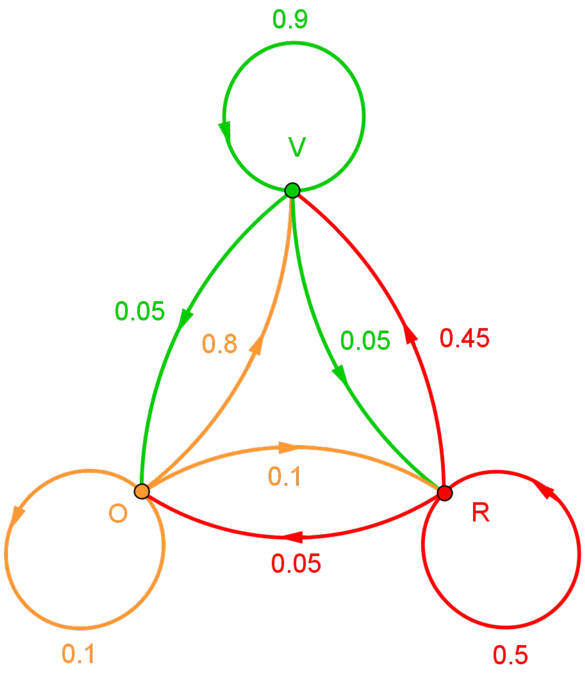
$P_{O_n}(V_{n+1})=0,8$ et $P_{O_n}(O_{n+1})=0,1$
donc $P_{O_n}(R_{n+1})=1-P_{O_n}(V_{n+1})-P_{O_n}(O_{n+1})=1-08-0,1=0,1$

$P_{R_n}(R_{n+1})=0,5$ et $P_{R_n}(O_{n+1})=0,05$
donc $P_{R_n}(V_{n+1})=1-P_{R_n}(R_{n+1})-P_{R_n}(O_{n+1})=1-0,5-0,05=0,45$

Si on considère un arbre pondéré pour passer d'un feu tricolore au suivant, la partie droite de l'arbre pondéré est constante.



Puis on trace le graphe de sommets V, O et R oriené et pondéré suivant (que l'on appelle graphe probabiliste).



1.b. On place les sommets Dans l'ordre V, O et R et on considère la matrice M :

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

m_{ij} i : ligne j : colonne

m_{11} est le poids de l'arête VV égal à 0,9
m_{12} est le poids de l'arête VO égal à 0,05
m_{13} est le poids de l'arête VR égal à 0,05
m_{21} est le poids de l'arête OV égal à 0,8
m_{22} est le poids de l'ar^te OO égal à 0,1
m_{23} est le poids de l'arête OR égal à 0,1
m_{31} est le poids de l'arête RV égal à 0,45
m_{32} est le poids de l'arête RR égal à 0,5

$$M=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}$$

2.a. Si le premier rencontré est vert alors $v_1=1$, $o_1=0$ et $r_1=0$

$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_2=P_1M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}$$

2.b. $P_3=\begin{pmatrix} 0,87 & 0,05 & 0,08 \end{pmatrix}$

$$P_4=\begin{pmatrix} v_4 & o_4 & r_4 \end{pmatrix}=P_3M=\begin{pmatrix} 0,87 & 0,05 & 0,08 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}$$

On nous demande de calculer v_4

$v_4=0,87\times0,9+0,05\times0,8+0,08\times0,45=0,783+0,04+0,036=\mathbf{0,859}$

3. Si le premier feu rencontré est rouge alors $r_1=1$, $o_1=0$ et $v_1=0$

$P_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$P_2=P_1M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,05 & 0,05\\ 0,8 & 0,1 & 0,1\\ 0,45 & 0,05 & 0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,45 & 0,05 & 0,5\end{pmatrix}$$

2. Définitions

2.1. Graphe probabiliste

Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré tel que le poids de chaque arête est un nombre de l'intervalle [0;1] et la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet est égale à 1.

Exemple
Pour le graphe précédent :
La somme des poids des arêtes sortant de V (en vert sur le dessin) $0,9+0,05+0,05=1$.
La somme des poids des arêtes sortant de O (en orange sur le dessin) $0,8+0,1\times 0,1=1$ .1
La somme des poids des arêtes sortant de R (en rouge sur le dessin) $0,45+0,05+0,5=1$.

2.2. Etats

Les sommets du graphe sont les différentts états du système.

Le poids d'une arête est la probabilité conditionnelle de passer d'un état à l'autre. Pour l'exemple précédent le poids de l'arête VR est la probabilité conditionnelle de R sachant V : 0,05.

2.3. Etat probabiliste

Un état probabiliste d'un système est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possible de ce système, cette loi de probabilité est représentée par une matrice ligne.

3. Matrice de transition

3.1. Définition

On précise l'ordre choisi des sommets (ou des états).
La matrice de transition d'un grapne probabiliste d'ordre n est la matrice M dont les coefficients m_{ij} (i : ligne j : colonne) sont les poids des arêtes joignant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet s'il n'existe pas d'arête reliant ces deux sommets alors $m_{ij}=0$.

Pour l'exemple précédent :

$$M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,05 & 0,05\\ 0,8 & 0,1 & 0,1\\ 0,45 & 0,05 & 0,5\end{pmatrix}$$

3.2. Propriété

P_0 est l'état probabiliste initial et pour tout entier naturel k P_k l'état probabiliste après k répétitions de l'expérience décrite par le graphe probabiliste, ona :

$$P_{k+1}=P_kM \quad \textbf{et} \quad P_k=P_0M^k$$

4. Etat stable

On considère un graphe probabiliste d'ordre 2.

4.1. Définition

On dit qu'un état probabiliste P est stable s'il reste invariant dans la répétition de l'expérience décrite par le graphe probabiliste de matrice de transition M donc on a : $\mathrm{P}=\mathrm{PM}$.

4.2. Propriété (admise)

Dans le cas d'un graphe ptobabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition M ne comporte pas de zéro l'état probabiliste P_{n} (n est un entier naturel) converge toujours vers l'état stable P, vérifiant $\mathrm{PM}=\mathrm{P}$ indépendant de l'état initial P_0 .

4.3 Remarque

Pour calculer P

- On pose $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ x et y sont des nombres réels appartenant à l'intervalle [0;1], et on résout le système :
$\begin{cases} \mathrm{PM}=\mathrm{P} \\ x+y=1 \end{cases}$
- On pose $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ x est un nombre réel appartenant à l'intervalle [0;1], et on résout :
$\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}\mathrm{M}=\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$.