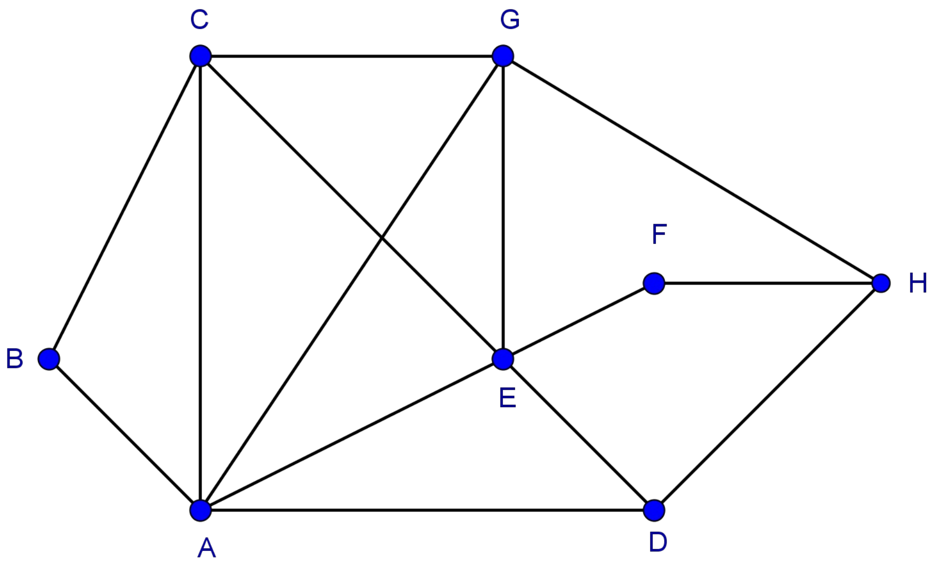
Exercice 1

Partie A

On note G le graphe représenté ci-dessous et M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est également donnée.



$$M^3=\begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire en justifiant votre réponse, si les affirmations sont vraies ou fausses.

1. L'ordre du graphe est égal au plus grand ges degrés des sommets.

2. Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3

3. Les sommets de G peuvent être coloriés avec trois couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.

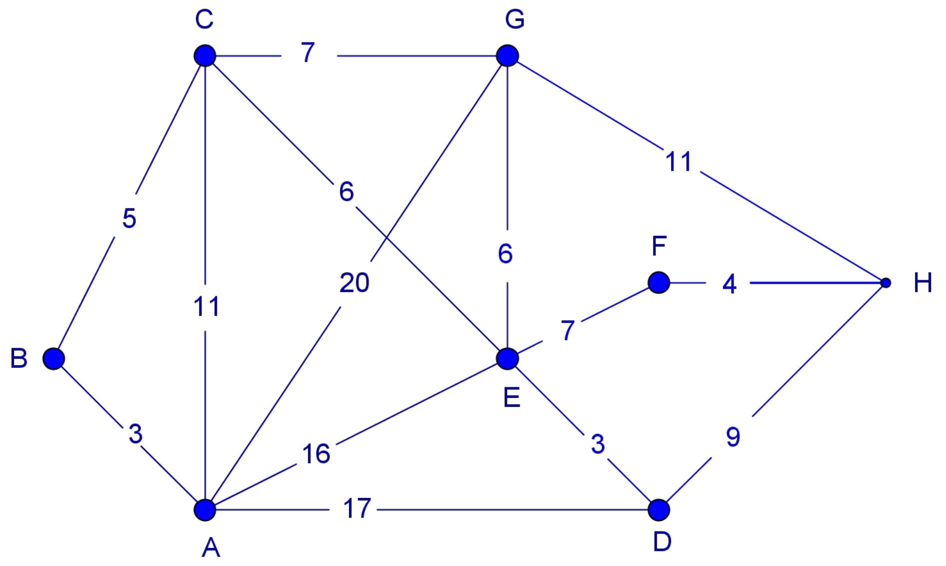
4. Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.

5. Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.

6. Il y a 72 chemins de longueur 3 qui relie le sommet E à chacun des huit sommets du graphe.

Partie B

Le graphe suivant représente un réseau de lignes d'autobus. Les sommets du graphe désignent les arrêts.les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux arrêts (correspondances comprises).



Déterminer à l'aide d'un algorithme, la durée minimale pour aller de l'arrêt A à l'arrêt H et donner ce trajet.

(Sujet Bac ES La Réunion juin 2004)

CORRECTION

Partie A

1. **Affirmation :** **FAUUSE**

   justifications

   L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe. (L'ordre de G est égal à 8).

2. **Affirmation :** **VRAIE**

   Justifications

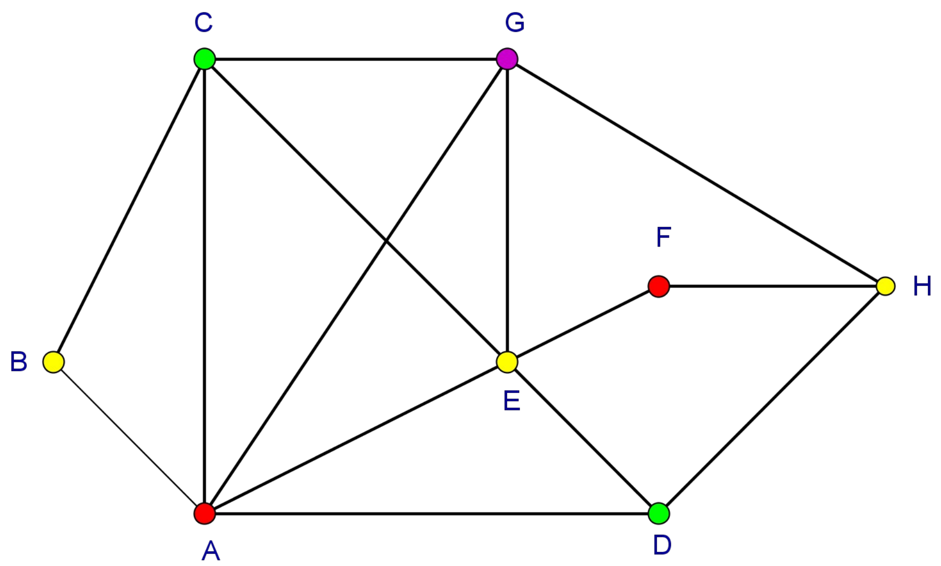
   {A;B;C} est un sous-graphe complet de G. (Toutes de sommets distincts de {A;B;C} sont reliés par une arête).

3. **Affirmation :** **FAUSSE**

   Justifications

   {A;C;G;E} est un sous-graphe complet d'ordre 4 du graphe donné donc le nombre chromatique de ce graphe est supérieur ou égal à 4. Il faut donc au moins quatre couleurs di fférentes pour colorier le graphe sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.

   On donne un exemple de coloriage du graphe :



On a utilisé quatre couleurs différentes donc le nombre chromatique du graphe est égal à 4. (Ce résultat n'est pas demandé).

4. **Affirmation :** **FAUSSE**

   Justifications

   Le théorème d'Euler précise : un graphe connexe admet un chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

   Une chaîne eulérienne est une chaîne passant une fois et une seule fois par chaque arête.

   Ici le degré de A est 5, le degré de D est 3, le degré de E est 5 et le degré de H est 3.

   Donc l'affirmation 4 est fausse.

5. **Affirmation ;** **VRAIE**

   Justifications

   Le coefficient m_{ij} 'i:ligne,j : colonne) de la matrice M^3 est le nombre de chemins de longueur 3 reliant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet.Seuls les deux coefficients m_{66} et m_{88} sont nuls, il n'existe pas de chemin de longueur 3 reliant F à F et de G à G. Pour toutes les autres paires de sommets il existe au moins un chemin de longueur 3 reliant ces deux sommets.

L'affirmation 5 est donc vraie.

6. Affirmation : **VRAIE**

Justifications

Le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à chacun des huit sommets du graphe est la somme des coefficients de la cinquième colonne (ou la cinquième ligne) de la matrice M^3 .

$12+5+12+11+8+8+13+3=72$.

L'affirmation 6 est donc vraie.

Partie B

On utilise l'algorithme de Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G	H
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	3(A)	11(A)	17(A)	16(A)	∞	20(A)	∞
	3(A)	8(B)	17(A)	16(A)	∞	20(A)	∞
		8(B)	17(A)	14(C)	∞	15(C)	∞
			17(A)	14(C)	21(E)	15(C)	∞
			17(A)		21(E)	15(C)	26(G)
			17(A)		21(E)		26(G)
					21(E)		25(F)
							25(F)

La durée minimale d'un chemin de A à H est 25mn.

H→F→E→C→B→A

Donc la chaîne obtenue avec le tableau précédent est : ABCEFH.