Exercice 2 5 points

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.

a. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.

b. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.
Soit F la variable aléatoire qui, à tou t échantillon de 1000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.

a. Donner un intervalle de fluctuaion asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.

b. Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1000 dernières demandes effectuées 600 demandes ont été acceptées.
Enoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.

c. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

CORRECTION

1. X suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.

a. En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(30 \leqslant X \leqslant 35) = 0{,}1326$

Valeur approchée à 10^{-3} : $P(30 \leqslant X \leqslant 35) =$ **0,133**

b. La probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans est :

$P(55 < X) = 1 - P(X \leqslant 55) \simeq$ **0,113**

2.a. $p = 0{,}75$ est l'hypothèse de la proportion de prêts acceptés dans l'ensemble des prêts demandés fait par la banque.

Pour des échantillons de 1000 demandes :

$n = 1000 \geqslant 30 \qquad np = 750 \geqslant 5 \qquad n(1-p) = 250 \geqslant 5$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque est :

$$I_{1000} = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{1000}} ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{1000}} \right]$$

$$I_{1000} = \left[0{,}75 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}75 \times 0{,}25}{1000}} ; 0{,}75 + \sqrt{\frac{0{,}75 \times 0{,}25}{1000}} \right]$$

En utilisant la calculatrice on obtient :

$I_{1000} =$ **[0,723;0,777]**

b. $f = \dfrac{600}{1000} =$ **0,6** est la fréquence observée dans l'échantillon de taille 1000.

Règle

- Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle I_{1000} alors l'hypothèse : « la proportion des prêts acceptés dans l'ensemble des prêts demandés est $p = 0{,}75$ », n'est pas remise en question avec un risque d'erreur de 5 %.
- Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle I_{1000} alors on rejette l'hypothèse :« la proportion des prêts acceptés dans l'ensemble des prêts demandés est $p = 0{,}75$ » avec un risque d'erreur de 5 %.

c. Conséquence :

0,6 n'appartient pas à I_{1000}, le slogan publicitaire n'est pas vérifié avec un risque d'erreur de 5 %.

