Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1^{er} janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5% des ouvrages, trop vieux ou abimés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2013+n).
On donne $u_0=42$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=0{,}95\times u_n+6$

2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

Variables :	U,N
Initialisation :	Mettre 42 dans U
	Mettre 0 dans N
Traitement :	Tant que $U < 100$
	U prend la valeur $U\times 0{,}95+6$
	N prend la valeur N+1
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N.

3. A l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2013+n).

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

2. On admet que $v_{n+1}=v_n\times 0{,}95+4$ avec $v_0=42$.
On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n=v_n-80$
Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q=0{,}95$ et préciser son premier terme u_0 .

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $w_n=-38\times(0{,}95)^n$

a. Déterminer la limite de (w_n) .

b. En déduire la limite de (v_n) .

c. Interpréter ce résultat.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1. n est un entier naturel

u_n est le nombre (en milliers) d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2013+n).

u_{n+1} est le nombre (en milliers) d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2013+n+1).

Le nombre d'ouvrages (en milliers), trop vieux ou abimés, pendant l'année (2013+n) est $\frac{5}{100} \times u_n$.

On achète 6 000 ouvrages (soit 6 milliers) pendant l'année (2013+n).

Donc $u_{n+1} = u_n - \frac{5}{100} u_n + 6 = \left(1 - \frac{5}{100}\right) u_n + 6 = \frac{100-5}{100} u_n + 6 = \frac{95}{100} u_n + 6$

2. **Initialisation :** N=0 et $U = 42 = u_0$

Traitement : $1^{ème}$ boucle : U < 100

$U = 0{,}95 \times 42 + 6 = u_1 \simeq 45{,}9$

$N = 0 + 1 = 1$

$2^{ème}$ boucle : U < 100

$U = 0{,}95 \times u_1 + 6 = u_2 \simeq 49{,}6$

$N = 1 + 1 = 2$

On calcule donc les premiers termes de la suite (u_n).

N affiché est l'indice du dernier terme calculé.

On arrête le programme lorsque $U \geqslant 100$ c'est à dire lorsque l'on obtient le premier terme de la suite (u_n) supérieur ou égal à 100 et on affiche son indice N.

Conclusion

On obtient l'indice du premier terme de la suite supérieur ou égal à 100.

On peut en déduire facilement la première année pour laquelle le nombres d'ouvrages est supérieur ou égal à 100 000.

3. Si on réalise le programme à l'aide de la calculatrice, on obtient N=27 (c'est à dire l'année $2013 + 27 = 2040$)

Il est difficile de déterminer cette valeur en utilisant la calculatrice sans utiliser le programme.

Ici à titre d'exemple, on vous toutes les valeurs intermédiaires en utilisant un tableur.

On écrit alors A1 : 0 B1 : 42

A2 : = A1+1 B2 : = $B1 \times 0{,}95 + 6$

Puis on étire jusque A28 et B28.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

	A	B			
1	0	42	15	14	79.96
2	1	45.9	16	15	83.86
3	2	49-61	17	16	85.67
4	3	53.12	18	17	87.39
5	4	56.47	19	18	89.02
6	5	59.65	20	19	90.57
7	6	62.66	21	20	92.04
8	7	65.53	22	21	93.44
9	8	68.25	23	22	94.76
10	9	70.84	24	23	96.03
11	10	73.30	25	24	97.22
12	11	75.63	26	25	98.36
13	12	77.85	27	26	99.45
14	13	79.96	28	27	100.47

Partie B

1. 4 000 = 4 milliers d'ouvrages neufs
Il faut modifier la ligne :
U prend la valeur : Ux0,95+6
par U prend la valeur : **Ux0,95+4**

2. La suite (v_n) est définie par $v_0=42$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1}=0,95\,v_n+4$.
La suite (w_n) est définie par : pour tout entier naturel n : $w_n=v_n-80$ donc $v_n=w_n+80$.
Pour tout entier naturel n
$w_{n+1}=v_{n+1}-80=0,95\times v_n+4-80=0,95(w_n+80)-76=0,95\,w_n+76-76=0,95\,w_n$
<u>conséquence</u>
(w_n) **est la suite géométrique de raison** $q=0,95$ **et de premier terme**
$w_0=v_0-80=42-80=-38$

3. Pour tout entier naturel n
$w_n=-38\times(0,95)^n$

a. $0\leqslant 0,95<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=$ **0.**

b. Pour tout entier naturel n on a : $v_n=w_n+80$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$ **80.**

c. On a : $v_n=80+w_n$ et $w_n=-38\times 0,95^n<0$ donc $v_n<80$
Dans un avenir très lointain, le nombre d'ouvrages sera voisin de 80 000 (mais inférieur à 80 000).
En particulier iln'y aura jamais 100 000 ouvrages.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés