Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.
On considère que :
. Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9.
. Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.
Pour tout entier naturel non nul, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le $n^{\text{ième}}$ jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le $n^{\text{ième}}$ jour.
On a donc $a_n+b_n=1$.
Le 1^{er} jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1=0$

1.a. Traduire les données par un graphe probabiliste.
b. Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
c. Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.

2. Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a : $a_{n+1}=0{,}1\,a_n+0{,}8$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n\geqslant 1$, par $u_n=a_n-\frac{8}{9}$.
a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
b. Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.

4.a. Déterminer en justifiant la limite de (a_n) .
b. Interpréter ce résultat.

CORRECTION

1.a. On note :

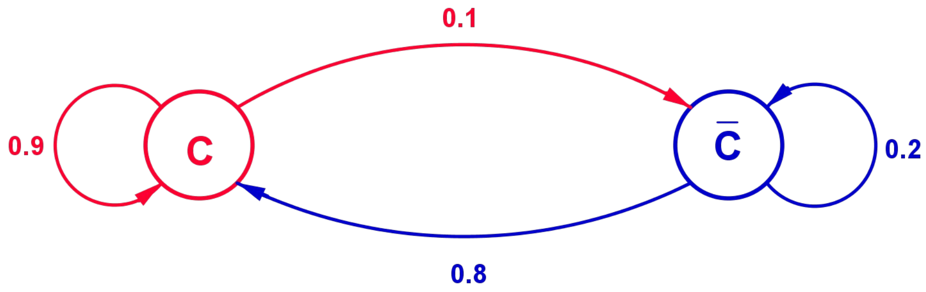
C : l'événement « Léa se connecte un certain jour ».

$\bar{C}$: l'événement « Léa ne ce connecte pas un certain jour ».

C et $\bar{C}$ sont les sommets du graphe.

- Si Léa se connecte un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9 c'est le poids de l'arête CC.
- Si Léa se connecte un certain jour, la probabilité qu'elle ne se connecte pas le lendemain est égale à $1-0,9=0,1$ c'est le poids de l'arête $C\bar{C}$.
- Si Léa ne se connecte pas un certain jour la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8 c'est le poids de l'arête $\bar{C}C$.
- Si Léa ne se connecte pas un certain jour, la probabilité qu'elle ne se connrcte pas le lendemain est égale à $1-0,8=0,2$ c'est le poids de l'arête $\bar{C}\bar{C}$.

On obtient l'arbre probabiliste suivant :



b. Remarque

Dans cet exercice on considère les matrices lignes.

On choisit l'ordre C puis $\bar{C}$ pour les sommets du graphe.

La matrice M de transition associée au graphe probabiliste est la matrice carrée :

$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête CC $\quad m_{11}=0,9$

m_{12} est le poids de l'arête $C\bar{C}$ $\quad m_{12}=0,1$

m_{21} est le poids de l'arête $\bar{C}C$ $\quad m_{21}=0,8$

m_{22} est le poids de l'arête $\bar{C}\bar{C}$ $\quad m_{22}=0,2$

$M=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

c. $P_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$

a_n est la probabilité que Léa se connecte le $n^{\text{ième}}$ jour.

b_n Est la probabilité que Léa ne se connecte pas le $n^{\text{ième}}$ jour.

$a_n+b_n=1$

Le 1^{er} jour, Léa ne se connecte pas donc $a_1=0$ et $b_1=1$ donc $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix}=P_1 M$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\times 0,9+1\times 0,8 & 0\times 0,1+1\times 0,2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

$P_3=\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \end{pmatrix}=P_2 M$

$\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8\times0{,}9+0{,}2\times0{,}8 & 0{,}8\times0{,}1+0{,}2\times0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}88 & 0{,}12\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a_3 & b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}88 & 0{,}12\end{pmatrix}$

La probabilité que Léa se connecte le $3^{\text{ème}}$ jour est : $a_3=$ **0,88.**

2. $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ et $P_{n+1}=\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel n non nul : $P_{n+1}=P_nM$

$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\times0{,}9+b_n\times0{,}8 & a_n\times0{,}1+b_n\times0{,}2\end{pmatrix}$

On obtient

$\begin{cases}a_{n+1}=0{,}9\,a_n+0{,}8\,b_n\\b_{n+1}=0{,}1\,a_n+0{,}2\,b_n\end{cases}$

On considère la première égalité : $a_{n+1}=0{,}9\,a_n+0{,}8\,b_n$ et aussi $a_n+b_n=1$ soit $b_n=1-a_n$

donc $a_{n+1}=0{,}9\,a_n+0{,}8(1-a_n)=0{,}9\,a_n+0{,}8-0{,}8\,a_n=0{,}1\,a_n+0{,}8$

$a_{n+1}=0{,}1\,a_n+0{,}8$

3.a. Pour tout entier naturel n non nul $u_n=a_n-\frac{8}{9}$ donc $a_n=u_n+\frac{8}{9}$

$u_{n+1}=a_{n+1}-\frac{8}{9}=(0{,}1\,a_n+0{,}8)-\frac{8}{9}=0{,}1\,a_n+\frac{0{,}8\times9-8}{9}=0{,}1\,a_n-\frac{0{,}8}{9}=0{,}1\left(u_n+\frac{8}{9}\right)-\frac{0{,}8}{9}$

$u_{n+1}=0{,}1\,u_n+\frac{0{,}8}{9}-\frac{0{,}8}{9}=0{,}1\,u_n$

donc (u_n) **est la suite géométrique de raison** $q=0{,}1$ **et depremier terme :** $u_1=a_1-\frac{8}{9}=-\frac{8}{9}$.

b. Pour tout entier naturel n non nul

$u_n=u_1\times q^{n-1}=-\frac{8}{9}\times(0{,}1)^{n-1}$

Or $a_n=u_n+\frac{8}{9}$

$a_n=\frac{8}{9}-\frac{8}{9}\times(0{,}1)^{n-1}$

4.a. $0\leqslant0{,}1<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}1)^{n-1}=0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{8}{9}$

b. **Pour assez grand, la probabilité pour que Léa se connecte le** $n^{\text{ième}}$ **jour est très voisine de** $\frac{8}{9}$.