Exercice 4 6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans unrepére orthonormé.

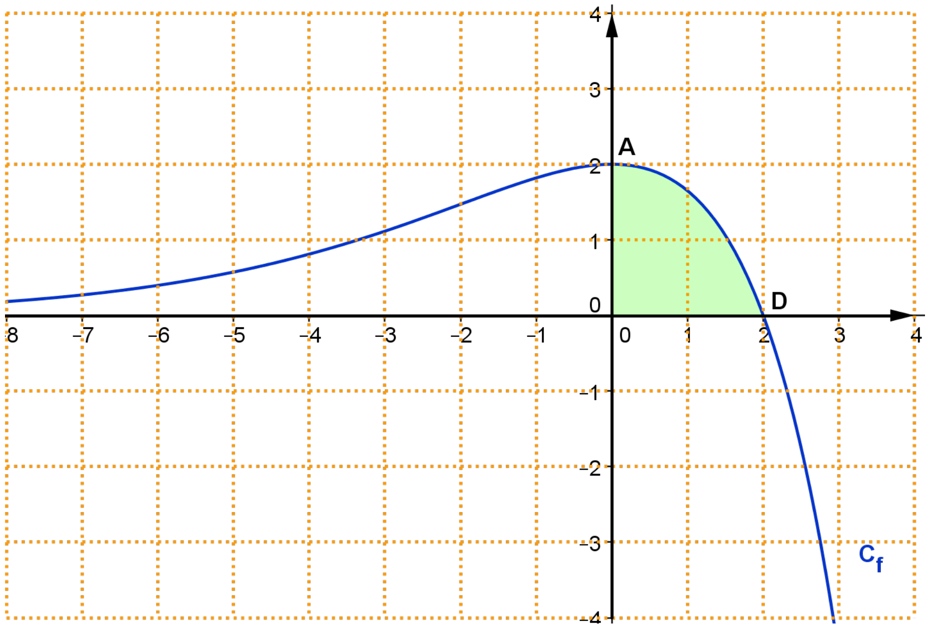

Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x)=(b-x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.
On sait que :
. Les points $A(0;2)$ et $D(2;0)$ appartiennent à la courbe C_f .
. La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.
On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indi quer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.

2. Calculer $f'(x)$.

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b-2=0 \\ ab-1=0 \end{cases}$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de f(x).

Partie B

On admet que $f(x)=(-x+2)e^{0,5x}$.

1. A l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x)\,dx$ est comprise entre 2 et 4.

2.a. On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(-2x+8)e^{0,5x}$.

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 f(x)\,dx$ et endonner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G.

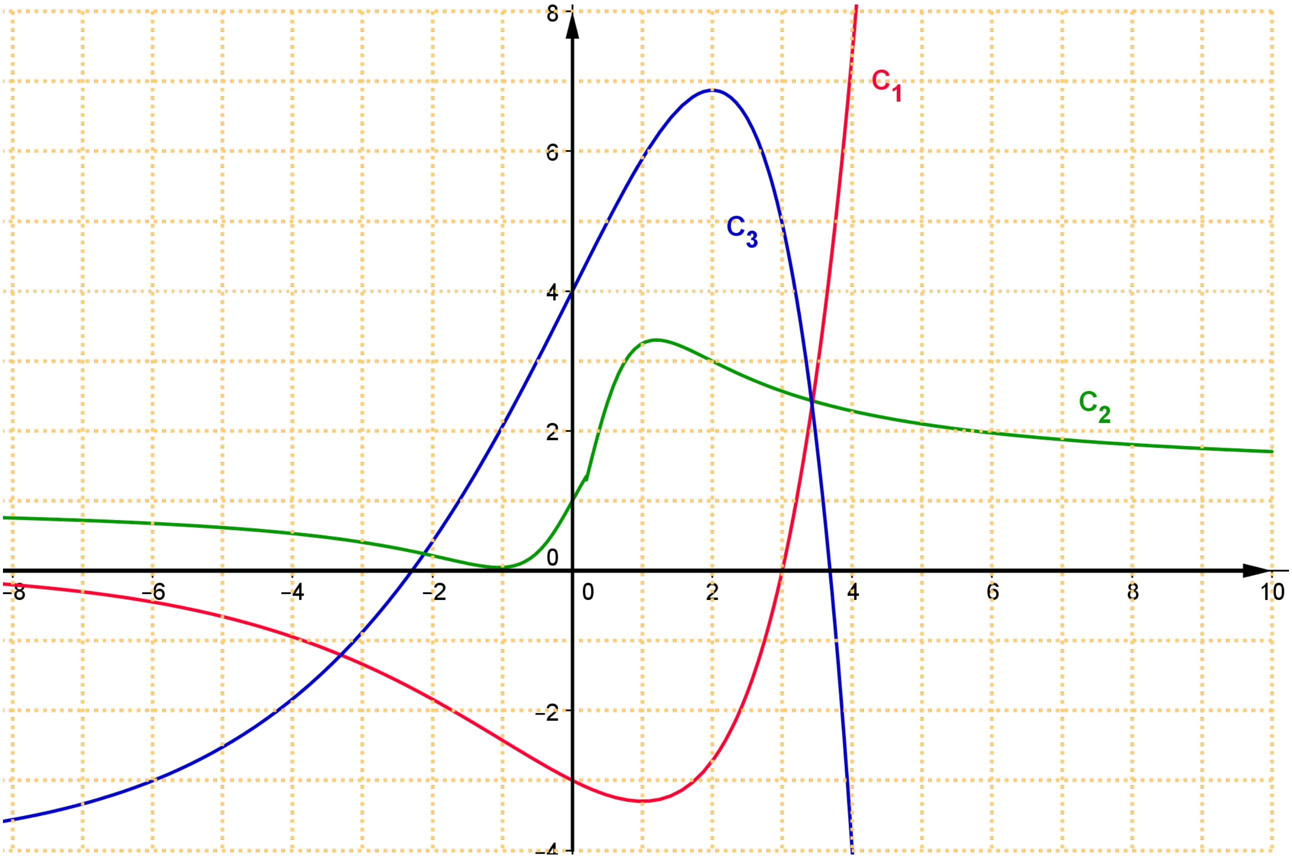

Figure 2

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x : $f(x)=(b-x)e^{ax}$

1. Le point $D(2;0)$ appartient à C_f donc $f(2)=0$.
La tangente au point $A(0;2)$ est horizontale donc $f'(0)$.= **0**

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$(b-x)'=-1$ et $(e^{ax})'=a\,e^{ax}$
$f'(x)=-1\times(e^{ax})+(b-x)\times(a\,e^{ax})=-e^{ax}+(ab-a\,x)e^{ax}=(ab-1-a\,x)e^{ax}$.

3. $f(2)=0=(b-2)e^{2x}$ or $e^{2x}\neq 0$ donc $b-2=0$
$f'(0)=0=(ab-1)e^{0}=ab-1$ car $e^{0}=1$ donc $ab-1=0$
Conséquence
$$\begin{cases} b-2=0 \\ ab-1=0 \end{cases}$$

4. $b-2=0 \Leftrightarrow b=2$
$ab-1=0=2a-1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}=0{,}5$
Conclusion
$a=0{,}5$ et $b=2$
Pour tout nombre réel x, on a : $f(x)=(2-x)e^{0{,}5x}$

Partie B

1. f est continue et positive sur [0;2] donc $\int_0^2 f(x)\,d\,x$ est l'aire en unité d'aire de la partie de plan comprise entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations : x=0 et x=2 (partie colorée en vert sur la figure 1).
Le repère est orthonormé.
L'unité d'aire est l'aire d'un carré de côté l'unité de longueur.
En regardant le quadrillage on peut affirmer que l'aire de la partie de plan colorée en vert est supérieure à 2 carrés et inférieure à l'aire de 4 carrés donc
$$2 < \int_0^2 f(x);d\,x < 4$$

2.a. Pour tout nombre réel x : $F(x)=(-2x+8)e^{0{,}5x}$
F est dérivable sur $\mathbb{R}$
$(-2x+8)'=-2$ et $(e^{0{,}5x})'=0{,}5\,e^{0{,}5x}$
$F'(x)=-2\,e^{0{,}5x}+(-2x+8)\times(0{,}5\,e^{0{,}5x})=(-2-x+4)e^{0{,}5x}=(-x+2)e^{0{,}5x}=f(x)$
donc **F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$**.

b. $\int_0^2 f(x)\,d\,x = F(2)-F(0)$
$F(2)=(-4+8)e^{0{,}5\times 2}=4\,e$ et $F(0)=8\,e^{0}=8$
$\int_0^2 f(x)\,d\,x=4\,e-8\simeq$ **2,87**

3. On considère la figure 1
f est positive sur [-8;2[puis négative donc toute primitive de f est croissante sur [-8;2[puis décroissante.
Conclusion
La courbe représentative d'une primitive G de f est C_3 **(courbe tracée en bleu sur la figure 2).**