

**Exercice 1****5 points**

Une entreprise informatique produit et vend des clés USB. La vente de ces clés est réalisée par des commerciaux qui se déplacent aux frais de l'entreprise.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle vraie ou fause et justifier la réponse.

1. La direction de l'entreprise décide de diminuer le budget consacré aux frais de déplacements de ses commerciaux.

**Affirmation 1 :** Diminuer ce budget de 6 % par an pendant 5 ans revient à diminuer ce budget 30 % sur la période de 5 ans ».

2. La production mensuelle varie entre 0 et 10 000 clés.

Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction  $B$  définie sur l'intervalle  $[0;10]$ , par :  $B(x) = -x^2 + 10x - 9$  où  $x$  représente le nombre de milliers de clés produites et vendues.

**Affirmation 2a :** « Lorsque l'entreprise produit entre 1000 et 9000 clés USB, le bénéfice est positif ».

**Affirmation 2b :** « Lorsque l'entreprise produit et vend 5000 clés USB, le bénéfice mensuel est maximal ».

**Affirmation 2c :** « Lorsque l'entreprise produit et vend entre 2000 et 8000 clés USB, son bénéfice son bénéfice mensuel moyen est égal à 78000 euros.

3. Pour contrôler la qualité du stock formés des milliers de clés USB fabriquées chaque année, on sélectionne au hasard un échantillon de 4000 clés ; Parmi ces clés, 210 sont défectueuses. Le directeur des ventes doit stopper toute la chaîne de fabrication des clés USB si la borne supérieure de l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, dépasse 7 %.

**Affirmation 3 :** « A l'issue du contrôle, le directeur des ventes stoppera toute la chaîne de fabrication ».

**CORRECTION**

**1. Affirmation 1 : FAUSSE**

*Justifications*

Si on diminue le budget de 6 % par an, pendant les 5 ans, alors le coefficient multiplicateur annuel est :  $1-0,06=0,94$ .

Pour 5 ans :  $0,94^5=0,734$  à  $10^{-3}$  près, la baisse du budget sur la période de 5 ans sera de:26,6 %.

**2.a. Affirmation 2a : VRAIE**

*Justifications*

On détermine le signe du trinôme  $B(x)$ .

$$\Delta=10^2-4\times(-1)\times(-9)=64=8^2$$

$$x'=\frac{-10-8}{-2}=9 \text{ et } x''=\frac{-10+8}{-2}=1$$

Le coefficient de  $x^2$  est négatif donc  $B(x)$  est positif pour  $1 < x < 9$ .

$x$  est le de milliers de clés USB produites et vendues donc lorsque l'entreprise produit et vend entre 1000 à 9000 clés USB, le bénéfice est positif.

**b. Affirmation 2b : VRAIE**

*Justifications*

Pour déterminer le bénéfice maximal, il suffit de déterminer les variations de  $B$ .

Pour tout nombre réel de l'intervalle  $[0;10]$   $B(x)=-x^2+10x-9$

$B$  est dérivable sur l'intervalle  $[0;10]$

$$B'(x)=-2x+10$$

$$-2x+10>0 \Leftrightarrow 5<x$$

$$-2x+10<0 \Leftrightarrow 5<x$$

$x$	0	5	10
$B'(x)$			
$B(x)$			

$$B(5)=-25+50-9=16$$

Le bénéfice est maximal lorsque l'entreprise produit et vend 5 milliers de clés.

Ce bénéfice maximal, est égal à 16 milliers d'euros.

**c. Affirmation 2c : FAUSSE**

*Justifications*

Nous venons de voir que le bénéfice mensuel maximal était égal à 16000€, donc le bénéfice men-suel moyen pour une production et vente comprise entre : 2000 et 8000 USB ne peut être égal à 78000 €.

A titre d'exercice, nous calculons ce bénéfice moyen.

$$B_m=\frac{1}{8-2}\int_0^8 B(x)dx=\frac{1}{6}\int_2^8 (-x^2+10x-9)dx$$

$$B(x)=-x^2+10x-9 \quad \mathcal{B}(x)=-\frac{1}{3}x^3+5x^2-9x$$

$\mathcal{B}$  est une primitive de  $B$  sur  $[0;10]$

$$B_m = \mathcal{B}(8) - \mathcal{B}(2) = \frac{1}{6} \left( -\frac{8^3}{3} + 5 \times 8^2 - 9 \times 8 + \frac{8}{3} - 20 + 18 \right) = \frac{1}{6} \left( -\frac{512}{3} + 320 - 72 + \frac{8}{3} - 2 \right)$$
$$B_m = \frac{1}{6} \left( -\frac{504}{3} + 246 \right) = \frac{1}{6} (-168 + 246) = 13$$

Le bénéfice moyen est égal à 13000 €.

### 3. **Affirmation 3 : FAUSSE**

*Justifications*

La proportion de clés défectueuses parmi les 4000 de l'échantillon est :  $f = \frac{210}{4000} = 0,0525$

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est :  $I_n = \left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

$n = 4000$  ;  $\sqrt{n} = 20\sqrt{10}$  et  $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,0158$  à  $10^{-4}$  près

$$I_n = [0,037; 0,0689]$$

On a : **0,0689 < 0,07**