Exercice 2 — 6 points

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\,e^{-x}+1$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.

1.a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=e^{-x}(1-x)$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2.a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [-1;0].

b. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y=x+1$.

4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.
A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x, l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la fonction dérivée seconde de f.

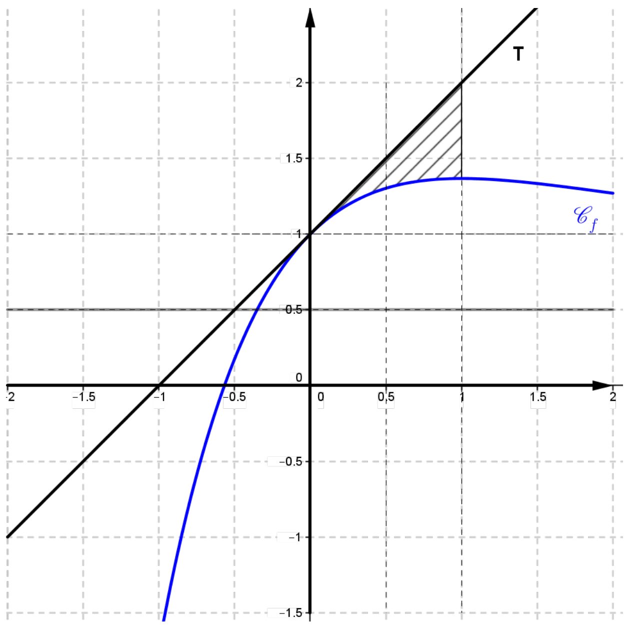
	Instruction	Réponse
1	f(x)=x*exp(-x)+1	$xe^{-x}+1$
2	f"(x)=dérivée seconde[f(x)]	$e^{-x}(x-2)$
3	résoudre$[e^{-x}(x-2)\geq 0]$	$x\geq 2$

a. Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

c. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $]-\infty;2]$.

5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.



a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=e^{-x}(-1-x)+x$.
Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ puis donner une valeur le résultat arrondi à 10^{-3} près.

CORRECTION

1.a. Pour tout nombre réel x : $f(x)=xe^{-x}+1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(e^u)=u'\times e^u$ donc $(e^{-x})'=-e^{-x}$

$f'(x)=1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})=e^{-x}(1-x)$

b. Pour tout nombre réel x : $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (1-x).

$1-x>0\Leftrightarrow 1>x$ et $1-x<0\Leftrightarrow 1<x$.

f est strivtement croissante sur $]-\infty;1]$ et f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

2.a. $f(-1)=-e+1<0$ et $f(0)=1>0$.

f est une fonction continue et strictement croissante sur [-1;0] et $f(-1)<0<f(0)$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nour permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α par f appartenant à l'intervalle [-1;0] c'est à dire l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [-1;0].

b. En utilisant la calculatrice, on obtient : $f(-0{,}6)=-0{,}093$ à 10^{-3} près $(f(-0{,}6)<0)$ et $f(-0{,}5)=0{,}176$ à 10^{-3} près $(f(-0{,}5)>0)$ donc $-0{,}6<\alpha<-0{,}5$.

3. L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

or $f(0)=1$ et $f'(0)=1$ donc $y-1=1(x-1)$

T : y = x+1

4.a. Le signe de $f''(x)$ est le signe de x-2

$x-2>0\Leftrightarrow x>2$

$x-2<0\Leftrightarrow x<2$

f^1 est strictement décroissante sur $]-\infty;2]$

f' est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

b. f' est croissante sur $[2;+\infty[$ donc f est convexe sur $[2;+\infty[$

f' est décroissante sur $]-\infty;2]$ donc f est concave sur $]-\infty;2]$

c. On a donc $\mathscr{C}_f$ en dessous de toutes ses tangentes sur $]-\infty:2]$

1 appartient à lintervalle $]-\infty;2]$ donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de T sur $]-\infty;2]$

5.a. $F(x)=e^{-x}(-1-x)+x$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ $\quad(-1-x)'=-1$

$F'(x)=(-e^{-x})(-1-x)+e^{-x}(-1)+1$

$F'(x)=e^{-x}(1+x)-e^{-x}+1$

$F'(x)=e^{-x}(1+x-1)+1=xe^{-x}+1$

$F'(x)=f(x)$

donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. T est la droite représentative de la fonction g définie par $g(x)=x+1$

T est au dessus de $\mathscr{C}_f$ sur [0;1] donc l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre les deux courbes sur l'intervalle [0;1] est : $\mathscr{A}=\int_0^1(g(x)-f(x))\,dx$.

g(x) = x+1 une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est G définie par G(x) = $\frac{1}{2}x^2+x$

$$\mathscr{A}=\int_0^1(g(x)-f(x))\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx=G(1)-G(0)-(F(1)-F(0))$$

$\mathscr{A} = \frac{1}{2}+1-0-\left(e^{-1}(-2)+1+1\right)=\frac{3}{2}+\frac{2}{e}-2$

$\mathscr{A} = \frac{2}{e}-\frac{1}{2}$ U.A.

La calculatrice nous donne : $\mathscr{A} = 0{,}236$ U.A.