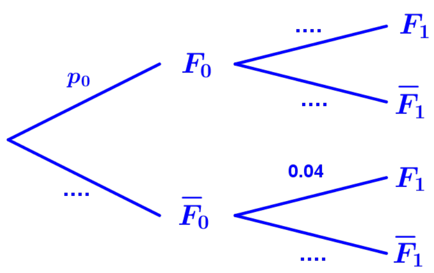
Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est à dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène).Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprés d'un échantillon de la population du pays ;
Les enquêtes réalisées rélèvent que d'un mois à l'autre :
. 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
. 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :
. F_0 l'événement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{F_0}$ son événement contraire ;
. F_1 l'événement « la personne interrogée le 1^{er} mois a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{F_1}$ son événement contraire.

1.a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



b. Montrer que $p_1 = 0{,}9\,p_0 + 0{,}4$

Pour la suite de l'exercice, on donne $p_0 = 0{,}55$ et on note, pour tout entier naturel n, F_n l'événe-ment « la personne interrogée le $n^{ième}$ moisa une opinion favorable » et p_n sa probabilité.
On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}9\,p_n + 0{,}4$.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	I et N sont des entiers naturels P est un réel
Entrée :	Saisir N
Initialisation :	P prend la valeur 0,55
Traitement :	Pour I allant de 1 à N P prend la valeur 0,9P+0,04 Fin Pour
Sortie :	Afficher P

a. Ecrire ce qu'affiche cette algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur N = 1.
b. Donner le rôle de cet algorithme.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0{,}4$
a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et préciser la valeur de son premier terme u_0 .

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
c. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

4.a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $0{,}15\times 0{,}9^n+0{,}4\leqslant 0{,}45$
b. Interpréter le résultat trouvé.

CORRECTION

1.a. 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus donc $P_{F_0}(\bar{F}_1)=0{,}06$

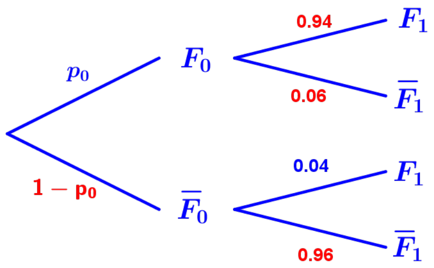
et $P_{F_0}(F_1)=1-P_{F_0}(\bar{F}_1)=1-0{,}06=0{,}94$

. 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent donc $P_{\bar{F}_0}(F_1)=0{,}04$

et $P_{\bar{F}_0}(\bar{F}_1)=1-P_{\bar{F}_0}(F_1)=1-0{,}04=0{,}96$

D'autre part : $P(\bar{F}_0)=1-P(F_0)=1-p_0$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



b. $p_1=P(F_1)$

En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales on obtient :

$P(F_1)=P(F_1\cap F_0)+P(F_1\cap\bar{F}_0)$

$P(F_1)=P(F_0)\times P_{F_0}(F_1)+P(\bar{F}_0)+P_{\bar{F}_0}(F_1)$

$P(F_1)=p_0\times 0{,}94+(1-p_0)\times 0{,}04=p_0\times 0{,}94+0{,}04-0{,}04\times p_0$

$P(F_1)=p_1=0{,}9\,p_0+0{,}04$

2.a. Pour $N=1$ (la seule valeur de I est 1) et P prend la valeur : $0{,}9\times 0{,}55+0{,}04$

c'est à dire p_1

et l'algorithme affiche : **0,535.**

b. Pour tout entier naturel n on a : $p_{n+1}=0{,}9\,p_n+0{,}04$

donc pour $N\geqslant 1$, l'algorithme nous donnera la valeur de : P_N

3. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n=p_n-0{,}4$ donc $(p_n=u_n+0{,}4)$

a. $u_{n+1}=p_{n+1}-0{,}4=0{,}9\,p_n+0{,}04-0{,}4=0{,}9(u_n+0{,}4)-0{,}36=0{,}9\,u_n+0{,}36-0{,}36$

$u_{n+1}=0{,}9\,u_n$

(u_n) est la suite géométrique de raison : 0,9

et de premier terme $u_0=p_0-0{,}4=0{,}55-0{,}4=0{,}15$;

b. Pour tout entier naturel n : $u_n=u_0\times q^n=0{,}15\times 0{,}9^n$

et $p_n=u_n+0{,}4=0{,}15\times 0{,}9^n+0{,}4$

c. $0<0{,}9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n=\mathbf{0}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\mathbf{0{,}4}$**.**

Donc dans un avenir « lointain » la cote de popularité du président sera très voisine de 40 %.

4.a. $0{,}15\times 0{,}9^n+0{,}4\leqslant 0{,}45\Leftrightarrow 0{,}15\times 0{,}9^n\leqslant 0{,}05\Leftrightarrow 0{,}9^n\leqslant\dfrac{0{,}05}{0{,}15}=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}9^n)\leqslant\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)\Leftrightarrow n\times\ln(0{,}9)\leqslant -\ln(3)$

$0<0{,}9<1$ donc $\ln(0{,}9)<0$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-\ln(3)}{\ln(0{,}9)}$

En utilisant la calculatrice on obtient : $\dfrac{-\ln(3)}{\ln(0{,}9)} = 10{,}43$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel donc $n \geqslant 11$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à **11.**

b. Après 11 mois la cote du président sera inférieure à 45 %.