Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent prati-quer le ski de piste ou le snowboard.
L'étude révèle que :
- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\bar{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».
On note également pour tout entier naturel n :
- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du $n^{\text{ième}}$ hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du $n^{\text{ième}}$ hiver ;
- $P_n=\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du $n^{\text{ième}}$ hiver.

On uppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\bar{S}$.

2.a. Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
b. Calculer M^2
c. Déterminer l'état probabiliste P_2.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $p_{n+1}=0{,}5\,p_n+0{,}3$.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables:
1    J et N sont des entiers naturels
2    p est un nombre réel
Entrée:
3    Saisir N
Initialisation:
4    p prend la valeur 1
Traitement:
5    Pour J allant de 1 à N
6        p prend  la valeur ................
7    Fin Pour
Sortie:
8    Afficher p
```

Recopier et compléter la ligne 6 de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité P_N.

Partie B

On considère, pour tout entier naturel n, l'événement S_n : « la personne pratique le ski de piste lors

du $n^{\text{ième}}$ hiver ». La probabilité de l'événement S_n est notée $P(S_n)$.
On a donc $p_n = P(S_n)$.
On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}3$.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0{,}6$.

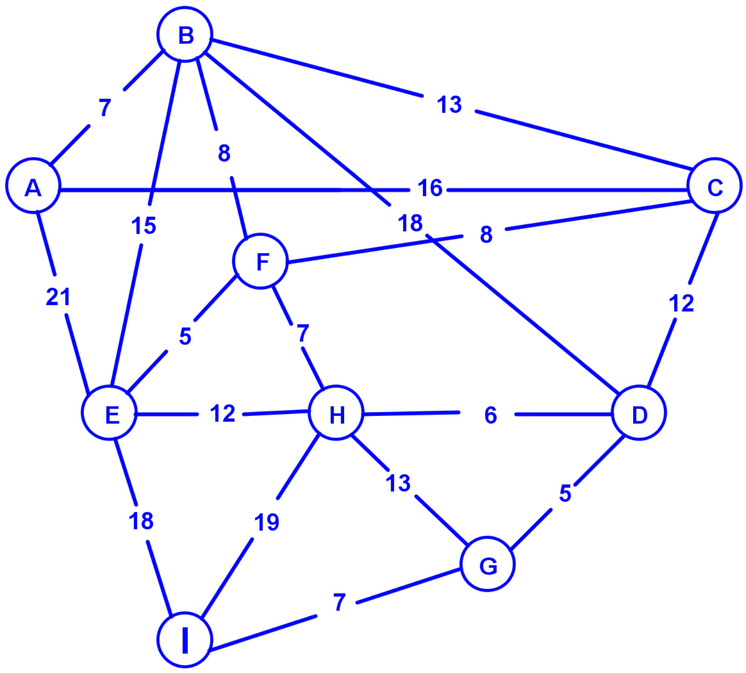
1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0.

2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.
Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

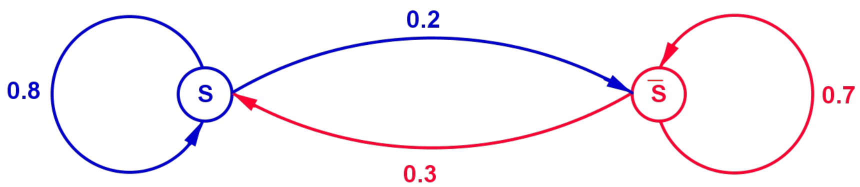
CORRECTION

1. L'arbre probabilisé admet deux sommets : S et $\bar{S}$

. Si une personne pratique le ski de piste un hiver alors la probabilité qu'elle pratique le snow-board l'hiver suivant est égale à 0,2 donc la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à : $1-0{,}2=0{,}8$.
<u>Conséquence</u>
Le poids de l'arête $S\bar{S}$ est $0{,}2$
Le poids de l'arête SS est $0{,}8$

. Si une personne prarique le snowboard un hiver alors la probabiité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à $0{,}3$ donc la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à : $1-0{,}3=0{,}7$
<u>Conséquence</u>
Le poids de l'arête $\bar{S}S$ est $0{,}3$
Le poids de l'arête $\bar{S}\bar{S}$ est $0{,}7$

. On obtient l'arbre probabiliste suivant :



2.a. L'ordre des sommets est S et $\bar{S}$

La matrice de transition M est une matrice carrée 2×2 $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête SS : 0,8
m_{12} est le poids de l'arête $S\bar{S}$: 0,2
m_{21} est le poids de l'arête $\bar{S}S$: 0,3
m_{22} est le poids de l'arête $\bar{S}\bar{S}$: 0,7

donc $M=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}$

b. Pour calculer M^2 on utilise la calculatrice

$$M^2=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}55\end{pmatrix}$$

c. $P_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$

1ère <u>méhode</u> (si on n'a pas calculé M^2)

$P_1=P_0M$

$$P_1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times0{,}8+0\times0{,}3 & 1\times0{,}2+0\times0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

$P_2=P_1M$

$$P_2=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8\times0{,}8+0{,}2\times0{,}3 & 0{,}8\times0{,}2+0{,}2\times0{,}7\end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix}0{,}64+0{,}06 & 0{,}16+0{,}14\end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$$

2ème <u>méthode</u> (si on a calculé M^2)

$P_2=P_0M^2$

$P_2=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}45 & 0{,}55\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 0{,}7+0\times 0{,}45 & 1\times 0{,}3+0\times 0{,}55\end{pmatrix}$

$P_2=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$

3. $P_n=\begin{pmatrix}p_n & q_n\end{pmatrix}$ $\quad p_n+q_n=1 \quad P_{n+1}=P_n M$

$\begin{pmatrix}p_{n+1} & q_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_n & q_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8\,p_n+0{,}3\,q_n & 0{,}2\,p_n+0{,}7\,q_n\end{pmatrix}$

donc $p_{n+1}=0{,}8\,p_n+0{,}3\,q_n$ or $q_n=1-p_n$

$p_{n+1}=0{,}8\,p_n+0{,}3(1-p_n)=0{,}8\,p_n+0{,}3-0{,}3\,p_n$

$p_{n+1}=0{,}5\,p_n+0{,}3$

4.

Variables:	
1	J et N sont des entiers naturels
2	p est un nombre réel
Entrée:	
3	Saisir N
Initialisation:	
4	p prend la valeur 1
Traitement:	
5	Pour J allant de 1 à N
6	p prend la valeur ..0,5p+0,3...
7	Fin Pour
Sortie:	
8	Afficher p

Partie B

1. $u_n=p_n-0{,}6$ (donc $p_n=u_n+0{,}6$)

$u_{n+1}=p_{n+1}-0{,}6=(0{,}5\,p_n+0{,}3)-0{,}6=0{,}5\,p_n-0{,}3=0{,}5(u_n+0{,}6)-0{,}3=0{,}5\,u_n+0{,}3-0{,}3$

$u_{n+1}=0{,}5\,u_n$

(u_n) est la suite géométrique de raison $q=0{,}5$ et de premier terme $u_0=p_0-0{,}6=1-0{,}6=0{,}4$

2. Pour tout entier naturel n :

$u_n=u_0\times q^n=0{,}4\times 0{,}5^n$

Or $p_n=u_n+0{,}6$

donc $p_n=0{,}4\times 0{,}5^n+0{,}6$

3. $0<0{,}5<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n=0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\mathbf{0{,}6}$

Dans un avenir « lointain » et dans la population considérée, il y aura 60 % des personnes qui feront du ski de piste et 40 % des personnes du snowboard.

Partie C

On utilise l'algorithme de DIJKSTRA

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	7(A)	16(A)	∞	21(A)	∞	∞	∞	∞
	7(A)	16(A)	25(B)	21(A)	15(B)	∞	∞	∞
		16(A)	25(B)	20(F)	15(B)	∞	22(F)	∞
		16(A)	25(B)	20(F)		∞	22(F)	∞
			25(B)	20(F)		∞	22(F)	38(E)
			25(B)			35(H)	22(F)	38(E)
			25(B)			30(D)		38(E)
						30(D)		37(G)
								37(G)

L'ordre inversé du parcours est IGDBA
La distance minimale est 37 (centaines de mètres) c'est à dire 3,7 km pour le parcours **ABDGI.**