Exercice 4 4 points

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale et arrondis à 10^{-3} *près.*
Les parties A et B sont indépendantes.

Dans un cabinet d'assurancet réalisée sur la fréquence des sinistres déclarés par les clients ainsi que leur coût.

Partie A

Une enquête affirme que 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année.

1. Dans le cadre d'une étude approfondie, on choisit au hasard et de manière indépendante 15 clients.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année.
a. Justifier que la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0{,}3$.
b. Calculer $P(X\geqslant 1)$.

2. Un expert indépendant interroge un échantillon de 100 clients choisis au hasard dans l'ensemble des clients du cabinet d'assurance.
a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année.
b. L'expert constate que 19 clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année.
Déterminer, en justifiant, si l'affirmation du cabinet d'assurance : « 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année » peutêtre validée par l'expert.

Partie B

Selon leur gravité, les sinistres sont classés en catégorie.

On s'interresse dans cette question au coût des sinistres de faible gravité sur le deuxième semestre de l'année.
On note Y la variable aléatoire donnant le coût, en euros, de ces sinistres.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $\mu=1200$ et d'écart type $\sigma=200$.

1. Calculer la probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût compris entre 1000 € et 1500 €.

2. Calculer la probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût supérieur à 1000 €.

CORRECTION

Partie A

1.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard un client.
S (succès) « le client a déclaré un sinistre au cours de l'année »
$p=P(S)=0{,}3$ (30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année)
$q=P(\bar{S})=1-0{,}3=0{,}7$
On choisit au hasard et de manière indépendante 15 clients donc on effectue 15 épreuves successives et indépendantes.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 15 épreuves donc la loi de probabilité de X esl la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0{,}3$.

b. L'événement contraire de l'événement $\{X\geq 1\}$ est l'événement $\{X=0\}$
$P(X=0)=0{,}7^{15}=0{,}005$ à 10^{-3} près
$P(X\geqslant 1)=1-0{,}7^{15}=0{,}995$ à 10^{-3} près
Remarque
On peut obtenir directement ce résultat à la calculatrice

2.a. $n=100\geqslant 30$ $\quad np=30\geqslant 5$ $\quad nq=70\geqslant 5$
donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année est :
$$I=\left[0{,}3-1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};0{,}3+\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$n=100 \qquad \sqrt{n}=10$
$$0{,}089<1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}3\times 0{,}7}}{10}<0{,}090$$
$$1{,}96\times\frac{\sqrt{0{,}3\times 0{,}7}}{10}=0{,}09 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$
$I=[0{,}21\,;0{,}39]$

b. 19 clients sur 100 ont déclaré un sinistre au cours de l'année. La proportion f de cet échantillon est 0,19.
Or 0,19 n'appartient pas à l'ntervalle $I=[0{,}21\,;0{,}39]$.
L'expert ne peut pas valider l'affirmation : « 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année » au seuil de 95 %.

Partie B

Y soit la loi normale d'espérance $\mu=1200$ et d'écart type $\sigma=200$.

1. En utilisant la calculatrice on obtient :
$P(1000\leqslant Y\leqslant 1500)=0{,}775$

2. En utilisant la calculatrice on obtient :
$P(1000<Y)=0{,}841$.