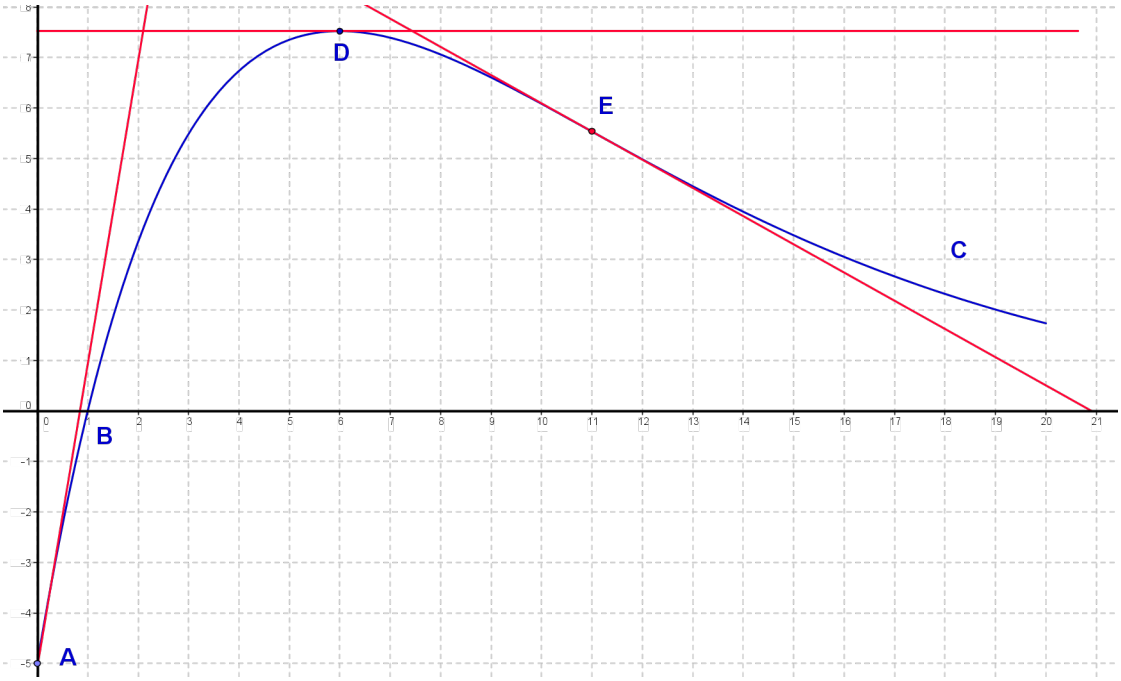
Exercice 2 — 6 points

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative C d'une fonction f définie sur l'intervalle [0;20]. On a tracé les tangentes à la courbe C aux points A,D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée).

1. Donner les valeurs exactes de f(0), f(1), $f'(0)$ et $f'(6)$.

2. Indiquer si la courbe C admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.

3. Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de $I = \int_4^8 f(x)\,dx$.

4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=4$. Préciser un encadrement de la ou (les) solution(s) à l'unité.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle [0;20] par : $f(x)=(5x-5)e^{-0,2x}$

1. Montrer que $f'(x)=(-x+6)e^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle [0;20]

2.a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur [0;20].

b. Dresser le tableau de variation de f sur [0;20]. On fera apparaître les valeurs exactes de f(0) et f(6).

3. Justifier que l'équation $f(x)=4$ admet une unique solution α sur [0;6]. Donner la valeur arrondie au millième de α.

4.a. Montrer que la fonction F définie sur [0;20] par : $F(x)=(-25x-100)e^{-0,2x}$ est une primitive de f sur [0;20].

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [4;8]. Donner sa valeur exacte.

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à [0;20]. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la prduction est vendue.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x)=4$ admet une autre solution β sur [6;20] dont la valeur arrondie au millième est 13,903.

1. Quelle doit-être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 ? (arrondir à l'unité).

2. L'entreprise pense produire réguliérement ente 400 et 800 objets.
Déterminer alos la valeur moyenne du bénéfice.(On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

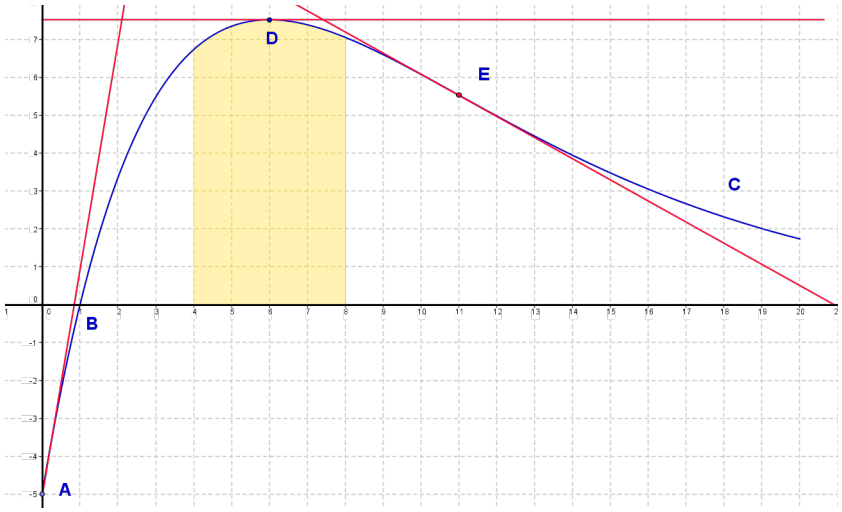
CORRECTION

1. **f(0) = -5** et **f(1) = 0**
   La tangente à la courbe C en A(0 ;-5) passe par le point de coordonnées (1;1).
   Le coefficient directeur de cette tangente est : $\frac{1-(-5)}{1-0}=\frac{6}{1}=6$ donc $f'(0)=6$.
   La tangente à la courbe C au point D d'abscisse 6 est horizontale donc $f'(6)=0$.

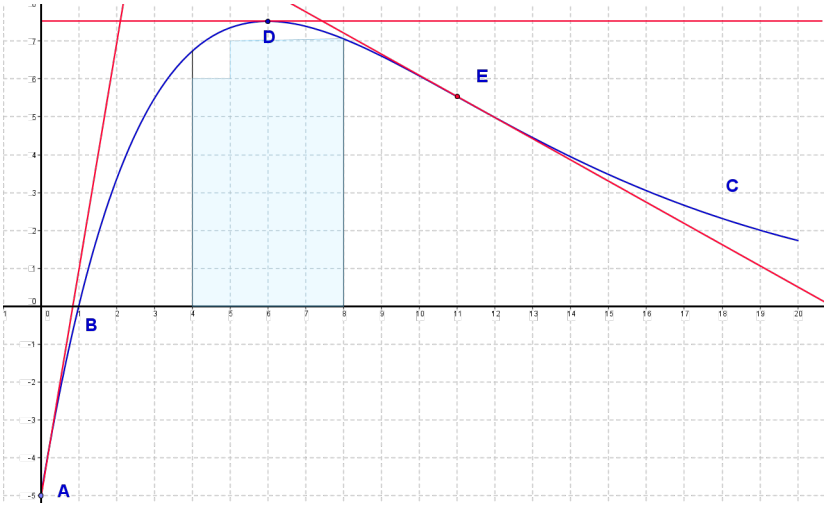
2. Le point E d'abscisse 11 est un point d'inflexion de C car pour $x\leqslant 11$ la courbe est en dessous de la tangente (à C au point E) et pour $x\geqslant 11$ la courbe est au dessus de cette tangente.

3. $I=\int_4^8 f(x)\,dx$

   f est continue et positive sur [4;8] donc I est l'aire en U.A. de la partie de plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x=4 et x=8.
   I est l'aire en U.A. de la partie de plan colorée en jaune sur la figure ci-après.



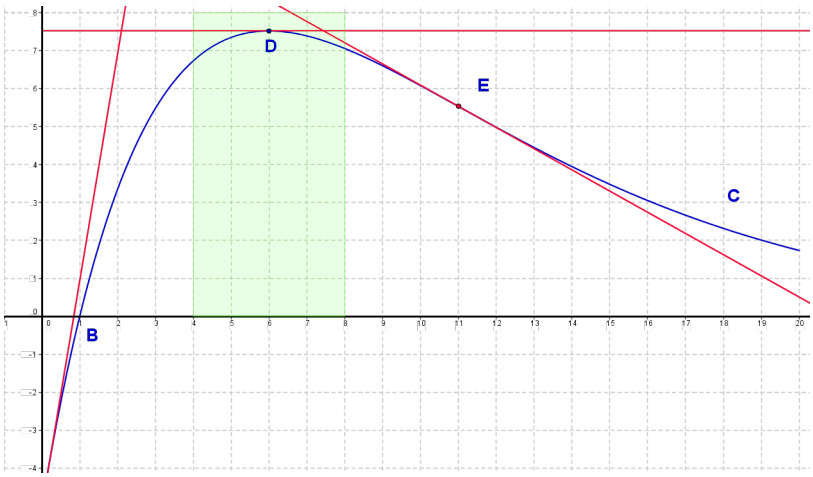
L'unité d'aire est l'aire du carré de côté de longueur l'unité de longueur.
On détermine le nombre de carrés d'entiers contenus dans la partie précédente.



On obtient 27 carrés (partie colorée en bleu).

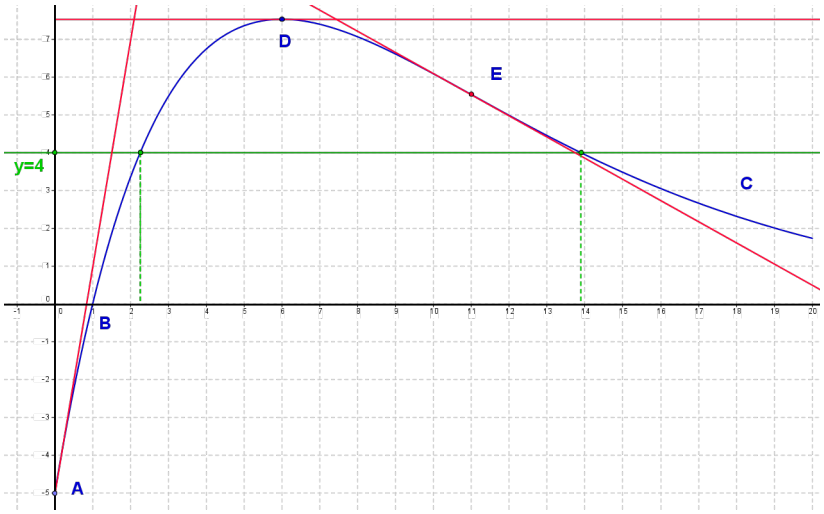
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

On détermine le nombre (minimal) de carrés entiers contenant la partie précédente.



On obtient 32 carrés (partie colorée en vert).
L'encadrement de I obtenu est : 27 < I < 32.
Mais on nous demande un encadrement d'amplitude 4.
En considérant la figure contenant la partie colorée en bleu, on peut affirmer que l'on puisse ajouter l'aire d'un carré entier.
Conclusion
28 < I < 32

4. On trace la droite d'équation : y = 4 et on détermine le nombre des points d'intersection avec C.
Les solutions de l'équation $f(x)=4$ sont les abscisses de ces points.



Il existe deux points d'intersection.
L'abscisse du premier point est comprise entre 2 et 3.
L'abscisse du deuxième point est comprise entre 13 et 14.
L'équation $f(x)=4$ admet 2 solutions x_1 et x_2, $2<x_1<3$ et $13<x_2<14$.

Partie B

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;20] : $f(x)=(5x-5)e^{-0,2x}$
f est dérivable sur [0;20]
$(e^u)'=u'e^u$
$u(x)=-0,2x$ $u'(x)=-0,2$ $(e^{-0,2x})'=-0,2e^{-0,2x}$
Puis on dérive un produit

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$f'(x)=5e^{-0,2x}+(5x-5)(-0,2e^{-0,2x})=5e^{-0,2x}-xe^{-0,2x}+1\times e^{-0,2x}$
$f'(x)=(-x+6)e^{-0,2x}$

2.a. Pour tout nombre réel x, $e^{-0,2x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de : -x+6.

x	0		6		20
$f'(x)$		+	0	-	

b. $f(0)=-5$ $f(6)=25e^{-1,2}\simeq 7,53$ $f(20)=35e^{-4}\simeq 1,74$

Tableau de variations

x	0		6		20
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-5	↗	$f(6)$	↘	$f(20)$

3. f est continue et strictement croissante sur [0;6] et $f(0)<4<f(6)$, le théorème des valeurs nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(x)=4$ appartenant à [0;6].
$\alpha=x_1$ nous avons vu que $2<x_1<3$, en utilisant la calculatrice on obtient successivement :
$f(2,2)<4<f(2,3)$ donc $2,2<\alpha<2,3$
$f(2,25)<4<f(2,26)$ donc $2,25<\alpha<2,26$
$f(2,256)<\alpha<f(2,257)$ donc $2,256<\alpha<2,257$
On vérifie que $f(2,2565)>4$
α = **2,256** (valeur arrondie au millième).

4.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;20) : $F(x)=(-25x-100)e^{-0,2x}$
F est dérivable sur [0;20]
$F'(x)=-25e^{-0,2x}+(-25x-100)(-0,2e^{-0,2x})=-25e^{-0,2x}+5xe^{-0,2x}+20e^{-0,2x}$
$F'(x)=(5x-5)e^{-0,2x}=f(x)$
donc F est une primitive de f sur [0;20].

b. La valeur moyenne de f sur [4;8] est égale à : $m=\dfrac{1}{8-4}\displaystyle\int_4^8 f(x)\,dx$

$m=\dfrac{1}{4}(F(8)-F(4))=\dfrac{1}{4}(-300e^{-1,6}+200e^{-0,8})$
$m=50e^{-0,8}-75e^{-1,6}\simeq 7,324$

Partie C

1. 4000€ = 4 milliers d'euros
Le bénéfice est supérieur à 4000€ si et seulement si $f(x)\geqslant 4$.
Graphiquement on obtient : $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ donc $2,256\leqslant x\leqslant 13,903$
n est le nombre d'objets n = 100x
$225,6\leqslant n\leqslant 1390,3$
n est un entier naturel

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$226 \leqslant n \leqslant 1390$

2. $4 \leqslant x \leqslant 8$ la valeur moyenne moyenne de f(x) est : $m = \frac{1}{4} \int_4^8 f(x)\,dx \simeq 7{,}324$ en milliers d'euros.

$B_m = 7324 €$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés