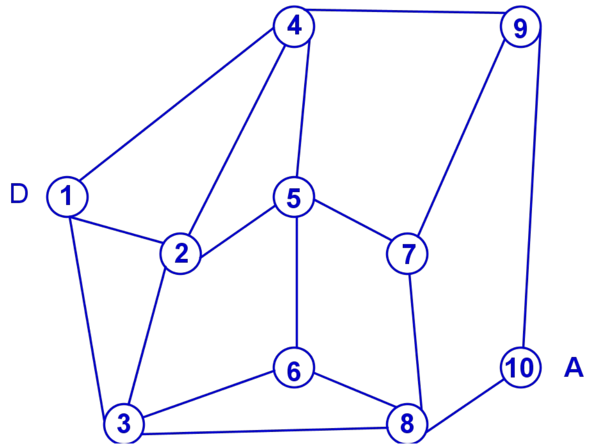
Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.
La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-dessous. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.



Légende
- 1 Départ
- 2 Passerelle
- 3 Roche percée
- 4 Col des 3 vents
- 5 Pic rouge
- 6 Refuge
- 7 Col vert
- 8 Pont Napoléon
- 9 Cascade des anglais
- 10 Arrivée

1. Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.

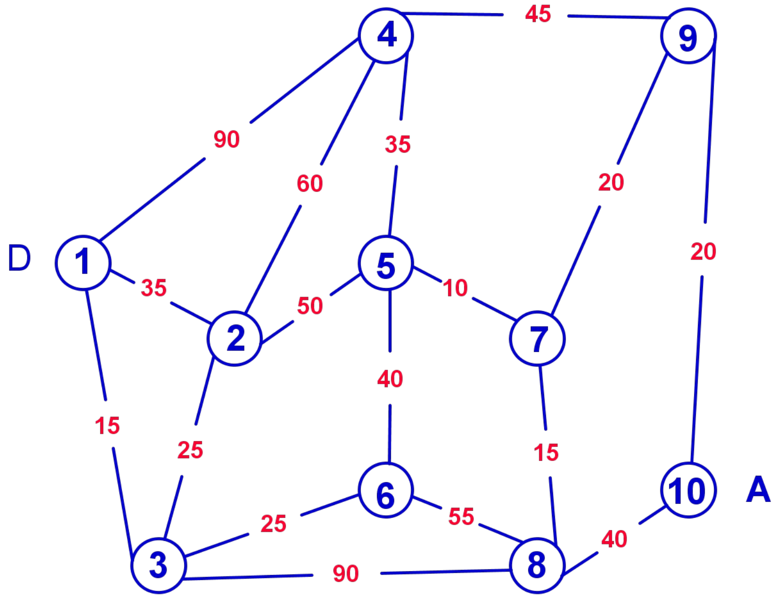
2. Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois ?
Justifier votre réponse.

3. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne ci-dessous M^5 .

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et quatrième colonne ?
b. Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntants 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le pic rouge.

4. On a complété le graphe décrivant les itinéraires avec las temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.



Déterminer l'itinéraire le plus court en temps.
On fera apparaître la démarche en utilisant un algorithme.

CORRECTION

1. **1-4-9-7-5-2-3-6-8-10**

2. On nous demande s'il existe une chaîne eulérienne reliant D à A.

Remarque

Une chaîne est dite eulérienne lorsqu'elle contient chaque arête une et une seule fois.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Ici le degré de 1 est 3
le degré de 6 est 3
le degré de 7 est 3
le degré de 9 est 3

Il y a quatre sommets de degré impair donc il n'existe pas de chaîne eulérienne reliant D à A.

3. **Pour information**

La matrice adjacente associée à ce graphe est une matrice carrée : 10×10 (car ce graphe contient 10 sommets).

$M=(m_{ij})\quad 1\leqslant i\leqslant 10\quad 1\leqslant j\leqslant 10$

m_{ij} est le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

S'il existe une arête reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet alors $m_{ij}=m_{ji}=1$ sinon $m_{ij}=m_{ji}=0$.

Pour le graphe donné, on obtient la matrice :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

(Cette matrice n'est pas demandée)

a. M^5 est une matrice carrée 10×10 .

$M^5=(m'_{ij})$

m'_{ij} est le nombre de chaînes de longueur 5 reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet.

Conséquence

$89=m_{24}=m_{42}$ est le nombre de chaînes de longueur 5 le $2^{\text{ème}}$ sommet(2) au $4^{\text{ème}}$ sommet(4).

b. Le nombre d'itinéraires allant de D vers A empruntant 5 sentiers (soit le nombre de chaînes de longueur 5 reliant le 1^{er} sommet (1) au $10^{\text{ème}}$ sommet (10)) est : $m_{10,1}=m_{1,10}=$ **31.**

Exemple

1-2-**5**-6-8-10

Le sommet 5 est *pic rouge.*

4. On utilise l'algorithme de **DIJKSTRA**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(1)	35(1)	15(1)	90(1)	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	35(1)	15(1)	90(1)	∞	40(3)	∞	105(3)	∞	∞
	35(1)		90(1)	85(2)	40(3)	∞	105(3)	∞	∞
			90(1)	80(6)	40(3)	∞	95(6)	∞	∞
			90(1)	80(6)		90(5)	95(6)	∞	∞
			90(1)			90(5)	95(6)	135(4)	∞
						90(5)	95(6)	110(7)	∞
							95(6)	110(7)	135(8)
								110(7)	130(9)
									130(9)

Le chemin le plus court en temps est :
1-3-6-5-7-9-10
Le temps mis pour le chemin le plus court en temps est : 130mn soit 2h 10mn.