Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5points

Une entreprise de produits cosmétiques fait réaliser une marketing sur une population donnée.

Cette étude montre que lors de la sortie d'une nouvelle crème hydratante, la probabilité qu'une cliente l'achète dès la première vente promotionnelle est de 0,2.
De plus, lorsqu'une cliente a acheté une crème hydratante lors d'une vente promotionnelle, la probabilité qu'elle en achète à nouveau lors de la vente promotionnelle suivante est de 0,8. Lorsqu'une cliente n'a pas acheté de crème hydratante, la probabilité pour qu'elle en achète à la vente promotionnelle suivante est de 0,3.
n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'une cliente achète une crème hydratante lors de la $n^{\text{ième}}$ vente promotionnelle.
- b_n la probabilité qu'une cliente n'achète pas une crème hydratante lors de la $n^{\text{ième}}$ vente promotionnelle.
- $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste à la $n^{\text{ième}}$ vente promotionnelle.

1.a. Déterminer P_1 .

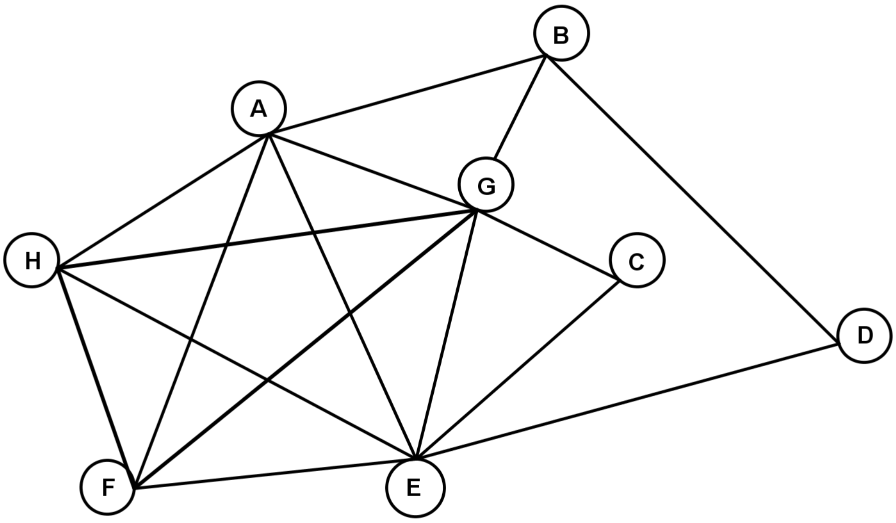
b. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets :
V quand il y a achat ;
$\overline{V}$ quand il n'y a pas achat.

2.a. Ecrire la matrice M de transition associée à ce graphe.

b. Calculer P_2 et P_3 . D'après ces résultats, quelles est l'effet de ces trois premières ventes promotionnelle ?

3. Justifier qu'il existe un état stable $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ pour cette situation. Le déterminer.

4. L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément. On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une mçeme commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.



L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués des produits ne représentant aucune incompatibilité d'achat. Combien de lots doit-elle prévoir au minimum ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.

CORRECTION

1.a. La probabilité que le client achète lors de la première vente promotionnelle est de 0,2.
Donc $a_1=0{,}2$ et $b_1=1-a_1=1-0{,}2=0{,}8$

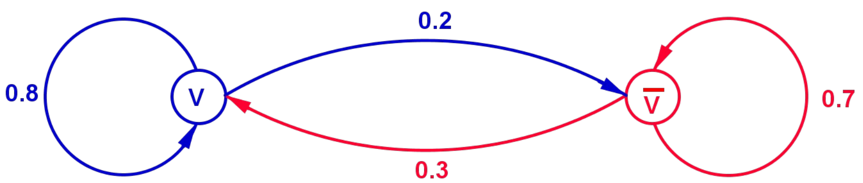
$P_1=(0{,}2 \quad 0{,}8)$

b. Les sommets du graphe sont V (quand il y a achat) et $\bar{V}$ (quand il n'y a pas achat).

. Lorsqu'une cliente a acheté une crème hydratante la probabilité qu'elle en achète de nouveau lors de la vente promotionnelle suivante est de 0,8 (donc la probabilité qu'elle n'en achète pas lors de la vente promotionnelle suivante est de : $1-0{,}8=0{,}2$).
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête VV est 0,8.
Le poids de l'arête $V\bar{V}$ est 0,2.

. Lorsqu'une cliente n'a pas acheté de crème hydratante lors d'une vente promotionnelle, la probabilité qu'elle en achète la vente promotionnelle suivante est 0,3 (donc la probabilité qu'elle n'en achète pas lors de la vente promotionnelle suivante est de : $1-0{,}3=0{,}7$).
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête $\bar{V}V$ est 0,3.
Le poids de l'arête $\bar{V}\bar{V}$ est 0,7.

. On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. L'ordre des sommets est V puis $\bar{V}$.

a. La matrice de transition M associée au graphe est une matrice carrée 2×2 ,

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

m_{11} est le poids de l'arête VV : 0,8
m_{12} est le poids de l'arête $V\bar{V}$: 0,2
m_{21} est le poids de l'arête $\bar{V}V$: 0,3
m_{22} est le poids de l'arête $\bar{V}\bar{V}$: 0,7

$$M=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

b. $P_2=P_1M$

$$P_2=(a_2 \quad b_2)=(0{,}2 \quad 0{,}8)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}=(0{,}2\times0{,}8+0{,}8\times0{,}3 \quad 0{,}2\times0{,}2+0{,}8\times0{,}7)$$

$$P_2=(1{,}6+2{,}4 \quad 0{,}04+0{,}56)=(0{,}4 \quad 0{,}6)$$

. $P_3=P_2M$

$$P_3=(a_3 \quad b_3)=(0{,}4 \quad 0{,}6)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}=(0{,}4\times0{,}8+0{,}6\times0{,}3 \quad 0{,}4\times0{,}2+0{,}6\times0{,}7)$$

$$P_3=(0{,}32+0{,}18 \quad 0{,}08+0{,}42)=(0{,}5 \quad 0{,}5)$$

La probabilité d'achat d'une cliente a augmenté de manière importante, lors des trois premières ventes promotionnelles ; Pour la troisième vente promotionnelle une cliente sur deux achète une (au moins) crème hydratante.

3. Pour déterminer s'il existe un état stable $P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, il faut résoudre le système : $P=PM$ et $a+b=1$.

$$P=PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0{,}8\,a+0{,}3\,b \\ b=0{,}2\,a+0{,}7\,b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}2\,a=0{,}3\,b \\ 0{,}3\,b=0{,}2\,a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{2a=3b$$

$$\begin{cases} P=PM \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=3b \\ b=1-a \end{cases}$$

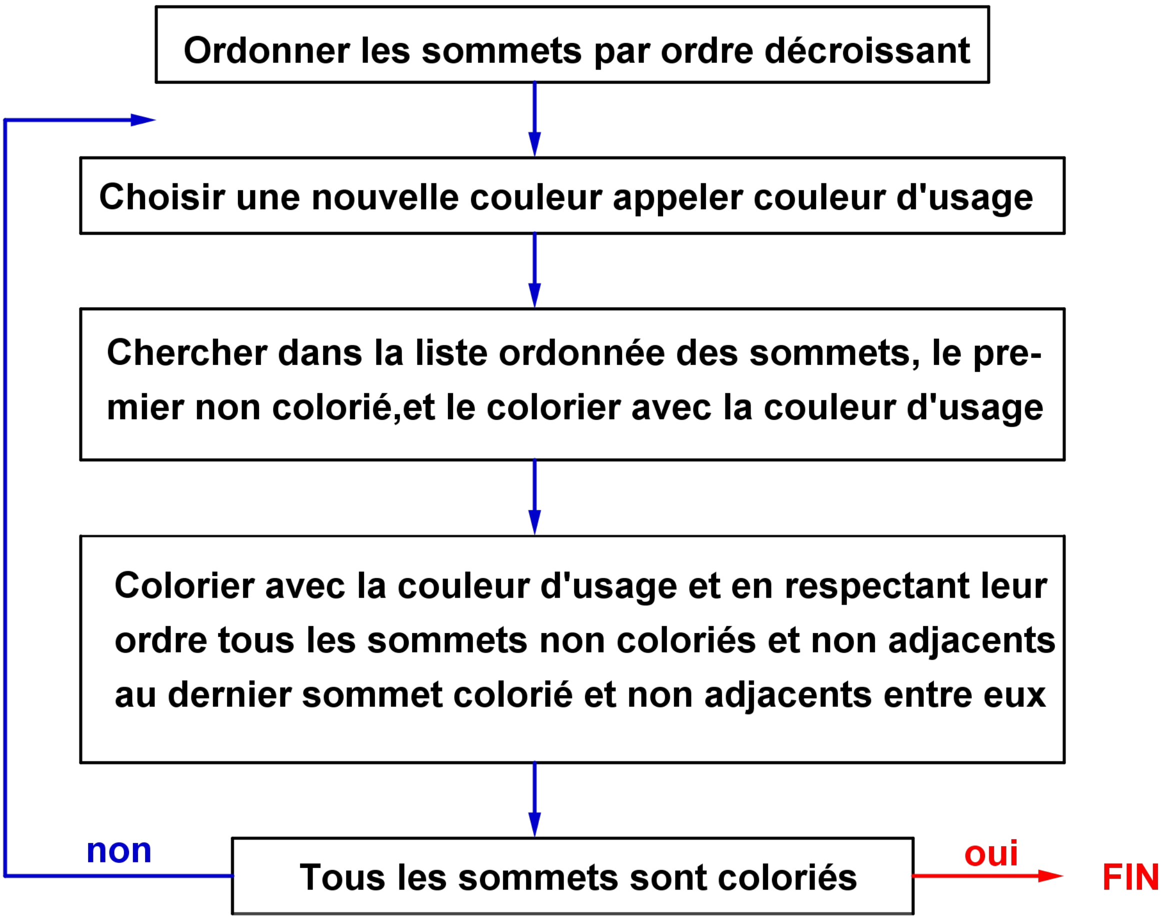
On obtient $2a = 3(1-a)$ soit $a=\frac{3}{5}=0{,}6$ et on déduit $b = 0{,}4$.

<u>Conclusion</u>

L'état stable est : $P=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

4. Le problème revient à la coloration du graphe. Deux sommets adjacents devant être colorés de deux couleurs différentes.

On rappelle un algorithme de coloration d'un graphe (algorithme de WELCH – POWELL).



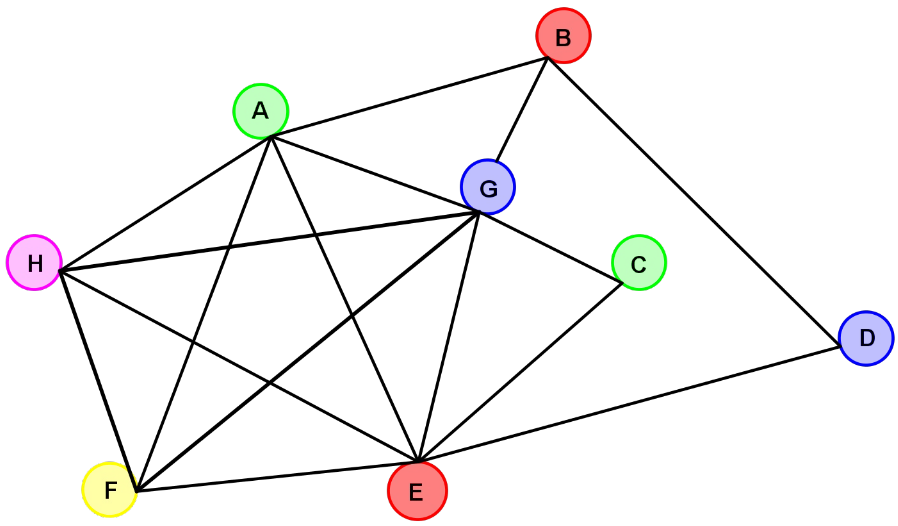
On détermine le degré des sommets

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	5	3	2	2	6	4	6	4

On place les sommets dans l'ordre décroissant des degrés, si des sommets ont le même degré on choisit l'ordre alphabétique.

Degrés	6	6	5	4	4	3	2	2
Sommets	E	G	A	F	H	B	C	D
Couleurs	1	2	3	4	5	1	3	2

On obtient le graphe suivant :



Justifications

. Couleur 1 : **rouge**
E est colorié en rouge.
Le seul point non adjacent à E est B que l'on colorie en rouge.

. Couleur 2 : **bleu**
G est colorié en bleu.
Le seul point non adjacent à G est D que l'on colotrie en bleu.

. Couleur 3 : **Vert**
A est colorié en Vert.
Les deux points non adjacents à A sont C et D or D est déjà colorié donc on colorie C en vert.

. Couleur 4 : **jaune**
F est colorié en jaune.
Le seul point non encore colorié est H qui est adjacent à F.

. Couleur 5 : violet
H est le dernier point et H est colorié en violet.

Conséquence

Il faut 5 couleurs donc on peut répartir les produits en 5 lots :
{E;B} , {G;D} , {A;C} , {F} et {H}.

Remarque

La coloration d'un graphe n'est pas un objectif du programme de TES.