Exercice 3 5 points

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes ona constaté :

. 10 % des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;

. 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution est la même au fil des ans.

Partie A

On considère l'algorithme suivant ;

Entrée :	Saisir n entier positif
Initialisation :	X prend la valeur 80
Traitement :	Pour i allant de 1 à n
	Affecter à X la valeur 0,9X+20
	Fin Pour
	X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1. Pour la valeur n=2 saisie, quelleest la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?

2. Interpréter dans le contexe du club de randonnée,pour la valeur n=2 saisie, le nombre affiché à la sortie de cette algorithme.

Partie B

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0=80$, et pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}9a_n+20$.
Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n=a_n-200$

a. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

b. Exprimer b_n en fonction de n.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n=200-120\times0{,}9^n$.

3. Quelle est la limite de la suite (a_n) ?.

Partie C

1. L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents.
Cet objectif est-il réalisable ?

2. Même question si l'objectif du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

CORRECTION

Partie A

1. Pour n=2
i=1 $X=0,9\times 80+20=72+20$ = **92**
i=2 $X=0,9\times 92+20=82,8+20$ = **102,8**
Fin Pour
X prend la valeur **102**
On affiche $\boxed{\mathbf{102}}$

2. Le nombre d'adhérents au club en $2006=2005+1$ est : $80-\frac{10}{100}\times 80+20=80-8+20=92$.

Le nombre d'adhérents au club en $2007=2005+2$ est : $92-\frac{10}{100}\times 92+20=92-9,2+20=102,8$

On arrondit à 102.
Donc le nombre affiché est le nombre d'adhérents au club en $2007=2005+2$.

Partie B

$a_0=80$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0,9\,a_n+20$ et $b_n=a_n-200$ (donc $a_n=200+b_n$).

1.a. Pour tout entier naturel n
$b_{n+1}=a_{n+1}-200=(0,9\,a_n+20)-200=0,9\,a_n-180=0,9\,(200+b_n)-180=180+0,9\,b_n-180$
$b_{n+1}=0,9\,b_n$ et $b_0=a_0-200=80-200=-120$
<u>Conclusion</u>
(b_n) est la suite géométrique de raison q=0,9 et de premier terme $b_0=-120$.

b. Pour tout entier naturel n :
$b_n=b_0\times q^n=-120\times 0,9^n$

2. Pour tout entier naturel n :
$a_n=200+b_n=200-120\times 0,9^n$

3. $0\leqslant 0,9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n=0$

<u>Conséquence</u>
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

Partie C

1. On résout l'inéquation : $a_n\geqslant 180$, l'inconnue étant l'entier naturel n.
$200-120\times 0,9^n\geqslant 180 \Leftrightarrow 20\geqslant 120\times 0,9^n \Leftrightarrow \frac{20}{120}\geqslant 0,9^n \Leftrightarrow \frac{1}{6}\geqslant 0,9^n$
La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$.
$\ln\left(\frac{1}{6}\right)\geqslant \ln(0,9^n)\Leftrightarrow -\ln(6)\geqslant n\ln(0,9)$
$0<0,9<1$ donc $\ln(0,9)<0$
$\frac{-\ln(6)}{\ln(0,9)}\leqslant n$
En utilisant la calculatrice, on obtient :

$\frac{-\ln(6)}{\ln(0,9)}=17,006$ à 10^{-3} près
n est un entier naturel
donc $18\leqslant n$.
L'objectif sera atteint dès $2005+18=2023$.

2. $a_n=200-120\times 0,9^n$
Pour tout entier naturel n, ona : $120\times 0,9^n>0$
donc $a_n<200$
<u>Conséquence</u>
Le club ne pourra jamais atteindre les 300 adhérents.