Exercice 4 — 5 points

Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour la construction automobile. On modélise le bénéfice journalier par la fonction B définie sur [0;10] par : $B(x)=x+4e^{-x}-5$ où x représente le nombre de pièces produites et vendues, exprimé en centaines, et B(x) représente le bénéfice, en milliers d'euros.

1.a. Déterminer $B'(x)$, où B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.

b. Démontrer que $B'(x)$ s'annule uniquement pour $x=\ln(4)$.

c. Calculer les valeurs exactes de $B(0)$, $B(10)$ et $B(\ln(4))$.

d. Dresser et compléter le tableau de variation de la fonction B sur [0:10].

2.a. Justifier que l'équation $B(x)=0$ possède une solution unique α sur $[\ln(4);10]$.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.

3. A partir de combien d'unités produites et vendues l'entreprise sera-t-elle bénéficiaire ?

CORRECTION

1.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;10]$, $B(x)=x+4e^{-x}-5$

$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-x})'=-e^{-x}$

B es dérivable sur [0;10] et $B'(x)=1-4e^{-x}$

b. $B'(x)=0 \Leftrightarrow 1-4e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow -x=\ln(4) \Leftrightarrow x=-\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

Or $\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln(4)$

$\Leftrightarrow x=\ln(4)$

La seule solution de l'équation $B'(x)=0$ est ln(4).

c. $B(0)=0+4e^0-5=4-5=$ **-1**

$B(10)=10+4e^{-10}-5=$ **5** + $4e^{-10}$ **.**

$B(\ln(4))=\ln(4)+4e^{-\ln(4)}-5=\ln(4)+4e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}-5=\ln(4)+4\times\frac{1}{4}-5$

$B(\ln(4))=\ln(4)-4$

d. $1-4e^{-x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\geq e^{-x}$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(\frac{1}{4})\geqslant\ln(e^{-x}) \Leftrightarrow -\ln(4)\geqslant -x \Leftrightarrow \ln(4)\leqslant x$

<u>Tabeau de variation de B</u>

x	0		ln4		10
Signe de f '(x)		−	0	+	
Variations de f(x)	-1	↘	$ln4-4$	↗	$5+4e^{-10}$

2.a. B est décroissante sur [0;ln(4)] donc pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;ln(4)] ona $B(0)\geqslant B(x)$ or $B(0)=-1$ donc $-1\geqslant B(x)$.

<u>Conséquence</u>

L'équation $B(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'ntervalle [0:ln(4)].

B est continue et strictement croissante sur [ln(4);10] et $B(\ln(4))=\ln(4)-4<0$ et $B(10)=5+4e^{-10}>0$ donc $B(\ln(4))\leqslant 0\leqslant B(10)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α par B c'est à dire que l'équation $B(x)=0$ admet une seule solution α appartenant à l'intervalle [0;10].

b. En utilisant la calculatrice

$B(4)=-0{,}93<0$	et	$B(5)=0{,}03>0$	donc $4<\alpha<5$
$B(4{,}9)=-0{,}07<0$	et	$B(5)=0{,}03>0$	donc $4{,}9<\alpha<5$
$B(4{,}97)=-0{,}002<0$	et	$B(4{,}98)=0{,}007>0$	donc $4.97<\alpha<4{,}98$

<u>Conclusion</u>

4,98 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. x est exprimé en centaines d'unités.
L'entreprise sera bénéficiaire à partir de la production et de la vente de **498 unités.**

