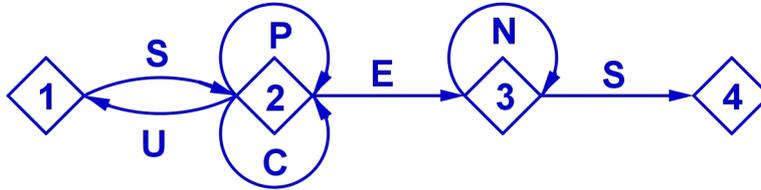


**Exercice 2**      **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**      **5 points**

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

**Partie A**

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant les sommets 1-2-3-4.



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu par le graphe.  
 SUCCES                  SCENES                  SUSPENS

2. Déterminer la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.

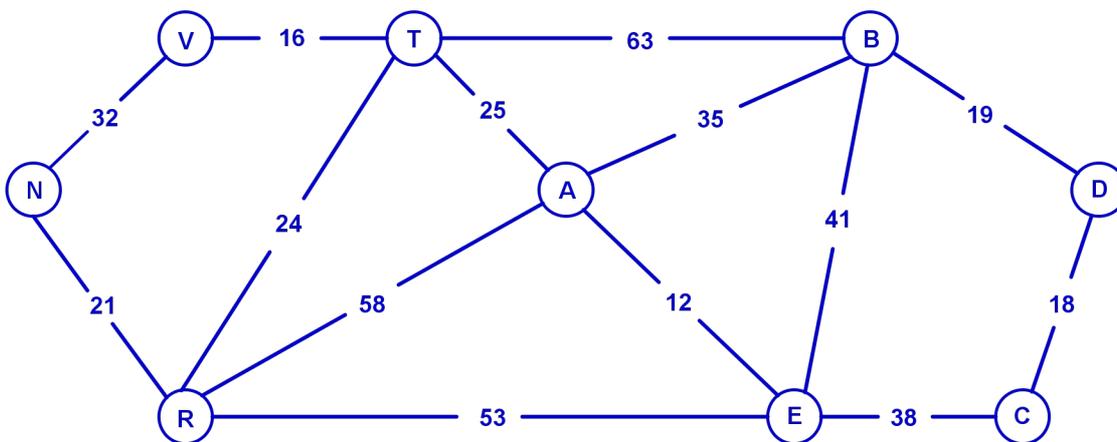
On donne les premières lignes de la matrice A.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Avec la calculatrice on a calculé :  $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?

**Partie B**



Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.

Il a construit le graphe précédent où les sommets représentent :

- |               |                    |              |
|---------------|--------------------|--------------|
| A : Amboise   | B : Blois          | C : Cheverny |
| D : Chambord  | E : Chenonceau     | T : Tours    |
| V : Villandry | R : Azay-le-rideau | N : Chinon   |

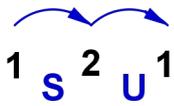
Sur les arêtes sont indiquées les distances en km.

1. Antoine peut-il partir de Blois et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.
2. Déterminer le plus court chemin pour aller du château de Chambord au château de Chinon. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

**CORRECTION**

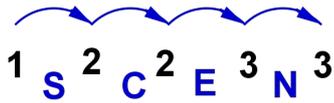
**Partie A**

1. SUCCES code non reconnu



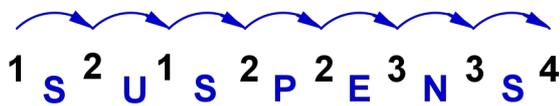
Pour être reconnu, après nécessairement on doit avoir un S.

. SCENES code non reconnu



Pour être reconnu, après nécessairement on doit avoir un N ou un S.

. SUSPENS code reconnu



2. La matrice d'adjacence A du graphe est la matrice carrée 4x4  $A=(a_{ij}) \quad 0 \leq i \leq 4 \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq 4$

$a_{ij}$  est le coefficient de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

$a_{ij}$  Est le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

Attention le graphe est **orienté** on a  $a_{ij}$  n'a pas nécessairement  $a_{ij}=a_{ji}$ .

$$\begin{matrix} a_{11}=0 & a_{12}=1 & a_{13}=0 & a_{14}=0 & a_{21}=1 & a_{22}=2 & a_{23}=1 & a_{24}=0 \\ a_{31}=0 & a_{32}=0 & a_{33}=1 & a_{34}=1 & a_{41}=0 & a_{42}=0 & a_{43}=0 & a_{44}=0 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.  $A^4=(a'_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a'_{ij}$  est le nombre de chaînes de longueur 4 reliant le sommet i au sommet j.

Pour obtenir un code reconnu par le graphe il faut choisir une chaîne de longueur 4 reliant le sommet 1 au sommet 4.

$a'_{14}=3$  donc il y a 3 codes de 4 lettres reconnus par le graphe.

Ces codes sont : SPES SCES SENS

**Partie B**

1. On nous demande si le graphe admet un cycle eulérien.

**Théorème d'Euler**

**Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 (c'est à dire tous les sommets sont de degré pair).**

On détermine les degrés des sommets du graphe et on donne les résultats sous la forme d'un tableau.

Sommets	A	B	C	D	E	N	R	T	V
Degrés	4	4	2	2	4	2	4	4	2

Tous les sommets ont un degré pair, donc il existe au moins un cycle eulérien.

Exemple

**BATBEARTVNRECD**

2. On utilise l'algorithme de **DIJKSTRA**.

D	A	B	C	E	R	T	V	N
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(D)	∞	19(D)	18(D)	∞	∞	∞	∞	∞
	∞	19(D)	18(D)	56(C)	∞	∞	∞	∞
	54(B)	19(D)		56(C)	∞	82(B)	∞	∞
	54(B)			56(C)	112(A)	79(A)	∞	∞
				56(C)	109(E)	79(A)	∞	∞
					103(T)	79(A)	95(T)	∞
					103(T)		95(T)	127(V)
					103(T)			124(R)
								124(R)

Le plus court chemin est : DBATR~~N~~ et il y a **124 km**.