Exercice 3 6 points

Le gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés est constitué de 70 % des abonnés de l'année précédente, auquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés.
Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2011 et 2012.

2. On définit la suite (u_n) par : $u_0=600$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}7u_n+210$
On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	600
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

Proposer une formule à écrire eb B3 pour calculer u_1 ; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (u_n).

3. On pose, pour entier naturel n : $v_n=u_n-700$
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7.
Préciser le premier terme.
b. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n=700-100\times 0{,}7^n$.

4.a. Soit n un entier naturel ; Démontrer que $u_n\geqslant 697 \Leftrightarrow 0{,}7^n\leqslant 0{,}03$
b. Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

Variables : N est un nombre entier naturel
U est un nombre réel
Initialisation : Affecter à N la valeur 0
Affecter à U la valeur 1
Traitement : Tant que U > 0,03
Affecter à N la valeur N+1
Affecter à U la valeur $0{,}7\times U$
Fin du Tant que
Sortie : Afficher N

Quelle valeur de N obtient-on en sortie ? (on fera tourner l'algorithme).
c. Retrouvez ce résultat en résolvant l'inéquation $0{,}7^n\leqslant 0{,}03$.
d. En utilisant l'étude précédente de la suite (u_n), déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés atteindra au moins 697.

CORRECTION

1. $u_0=600$ Il y a 600 abonnés en 2010.

$u_1=\frac{70}{100}\times 600+210=0{,}7\times 600+210=930$ Il ya 630 abonnés en 2011.

$u_2=\frac{70}{100}\times 630+210=0{,}7\times 630+210=651$ Il y a 651 abonnés en 2012.

2. En B3 on écrit : **=0,7xB2+210**

Avec le tableur on obtient (résultats non demandés)

	A	B
1	n	u_n
2	0	600
3	1	630
4	2	651
5	3	665.7
6	4	675.99
7	5	683.19
8	6	688.24
9	7	691.78

3. Pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-700$ (donc $u_n=700+v_n$).

a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-700=0{,}7\,u_n+210-700=0{,}7(v_n+700)-490=0{,}7\,v_n+490-490=0{,}7\,v_n$

donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison : 0,7.

$v_0=u_0-700=600-700=-100$

b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=-100\times 0{,}7^n$

or $u_n=700+v_n$

$u_n=700-100\times 0{,}7^n$

4.a. n est un entier naturel

$u_n\geqslant 697\Leftrightarrow 700-100\times 0{,}7^n\geqslant 697\Leftrightarrow 700-697\geqslant 100\times 0{,}7^n\Leftrightarrow 3\geqslant 100\times 0{,}7^n$

$\Leftrightarrow \frac{3}{100}\geqslant 0{,}7^n\Leftrightarrow 0{,}03\geqslant 0{,}7^n$

b. En faisant tour ner l'algorithme, on obtient : **N = 10.**

	A	B
1	N	0.7^N
2	0	1
3	1	0.7
4	2	0.49
5	3	0.343
6	4	0.240
7	5	0.168
8	6	0.118
9	7	0.082
10	8	0.058
11	9	0.040
12	10	0.028

c. $0{,}7\leqslant 0{,}03$

la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\ln(0{,}7^n)\leqslant\ln(0{,}03)$

$n\times\ln(0{,}7)\leqslant\ln(0{,}03)$

$0<0{,}7<1$ donc $\ln(0{,}7)<0$

$n\geqslant\dfrac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}7)}$

En utilisant la calculatrice on obtient : $\dfrac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}7)}\simeq 9{,}8$

n est un entier naturel donc $n\geqslant 10$

donc le plus petit entier naturel tel que $0{,}7^n\leqslant 0{,}03$ est **n = 10.**

d. $u_n\geqslant 697\Leftrightarrow n\geqslant 10$

En 2010+10=2020 le nombre d'abonnés sera pour la première année supérieure ou égale à 697.