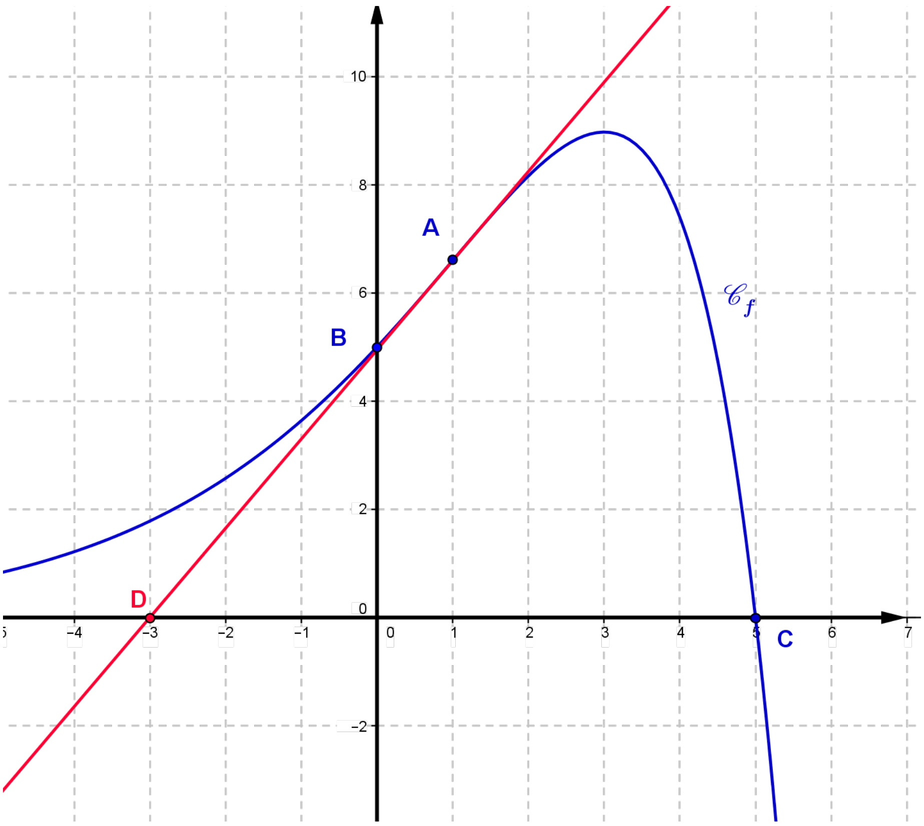
Exercice 4 5 points

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Elle passe par les points $A(1:4e^{0,5})$, $B(0;5)$ et $C(5;0)$.
Le point $D(-3;0)$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



Partie A- Par lecture graphique

1. Quel le signe de $f'(1)$? Justifier.

2. Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

3.a. Préciser le domaine du plan dont l'aire est égale à $I=\int_0^1 f(x)\,dx$ unités d'aire.

b. Recopier sur votre copie le seul encadrement qui convient parmi :
$0\leqslant I\leqslant 9$ $10\leqslant I\leqslant 12$ $20\leqslant I\leqslant 24$

Partie B-Par le calcul

On admet que pour tout réel x, $f(x)=(-x+5)e^{0,5x}$ et $f'(x)=(1,5-0,5x)e^{0,5x}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

1.a. Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x)=0,25(-x+1)e^{0,5x}$

b. Résoudre l'équation $f''(x)=0$.
Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c. Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ? Justifier.

2. Soit F la fonction définie, pour tout nombre réelx , par $F(x)=(-x+14)e^{0,5x}$. On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Calculer I = $\int_0^1 f(x)\,dx$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

CORRECTION

Partie A-Par lecture graphique

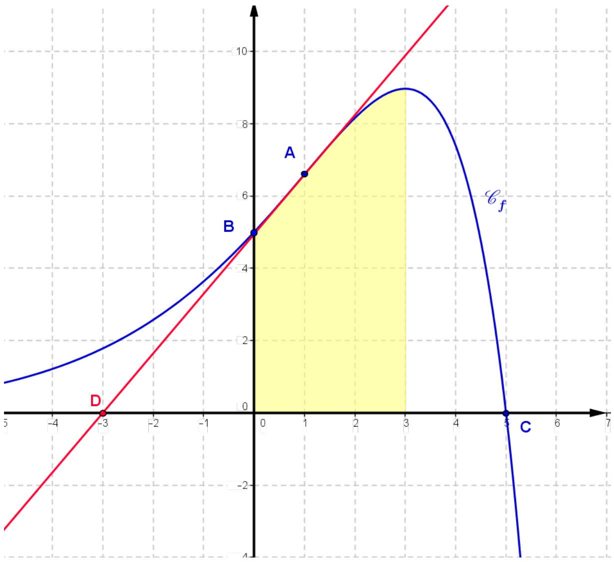
1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathscr{C}_f$. Ce coefficient directeur est positif (car la tangente est la représentation graphique d'une fonction affine croissante).

Conclusion

$f'(1)$ est du signe +

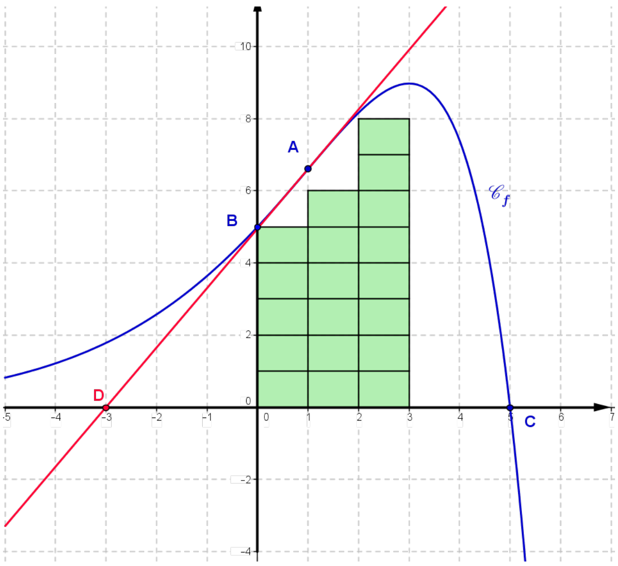
2. Graphiquement on remarque que pour $x < 1$ la courbe est au dessus de cette tangente et pour $x > 1$ la courbe est en dessous donc A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3.a. f est une fonction continue et positive sur [0;3] donc $I = \int_0^3 f(x)\,dx$ est l'aire en unités d'aire de la partie de plan : $\mathscr{D}$ comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des a bscisses et les droites x=0 et x=1.

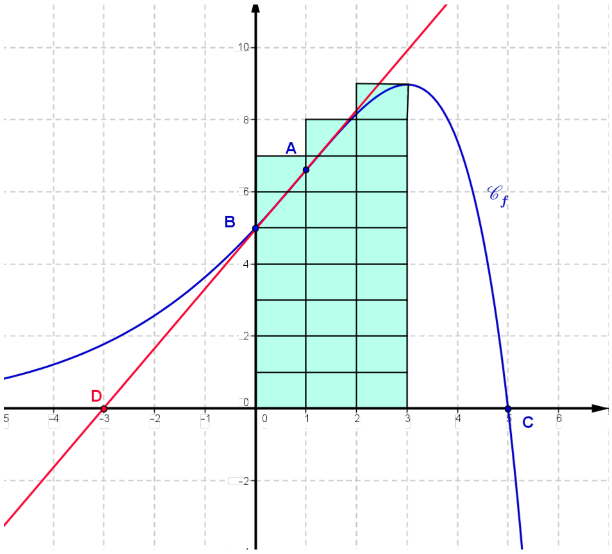


b. $20 \leqslant I \leqslant 24$

. On compte le nombre de rectangles entiers (de dimensions les unités de longueur sur les axes) contenus dans $\mathscr{D}$. On obtient 19 et on peut affirmer que l'aire de $\mathscr{D}$ est supérieure ou égale à 20 en évaluant la partie contenue dans $\mathscr{D}$ et non colorée en vert.



. On compte le nombre minimal de rectangles entiers contenant $\mathscr{D}$. On obtient 24 (partie colorée en bleu sur le dessin).



Partie B-Par le calcul

1.a. $f(x)=(-x+5)e^{0,5x}$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{0,5x})'=0,5e^{0,5x}$

En dérivant un produit on obtient

$f'(x)=-1\times e^{0,5x}+(-x+5)\times(0,5\times e^{0,5x})=(-1-0,5x+2,5)e^{0,5x}=(-0,5x+1,5)e^{0,5x}$

$f''(x)=(-0,5)e^{0,5x}+(-0,5x+1,5)(0,5e^{0,5x})=-0,5e^{0,5x}-0,25xe^{0,5x}+0,75e^{0,5x}$

$f''(x)=0,25(-x+1)e^{0,5x}$

b. $f''(x)=0\Leftrightarrow x=1$ car pour tout nombre réel x $e^{0,5x}>0$

Le signe de $f''(x)$ est le signe de -x+1.

On donne le résultat sous la forme d'un tableau

x	-∞		1		+∞
$f''(x)$		+	0	-	

Donc f'' s'annule en changeant de signe pour x=1 et le point A est un point d'inflexion de la courbe

c. $f''(x)\geqslant 0\Leftrightarrow -x+1\geqslant 0\Leftrightarrow 1\geqslant x$

donc f est convexe sur l'intervalle $]-\infty;1]$.

2. On admet que F, définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(-2x+14)e^{0,5x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc

$I=\int_0^3 f(x)\,dx = F(3)-F(0)=8e^{1,5}-14e^0$

$I=8e^{1,5}-8\simeq 21,85$.