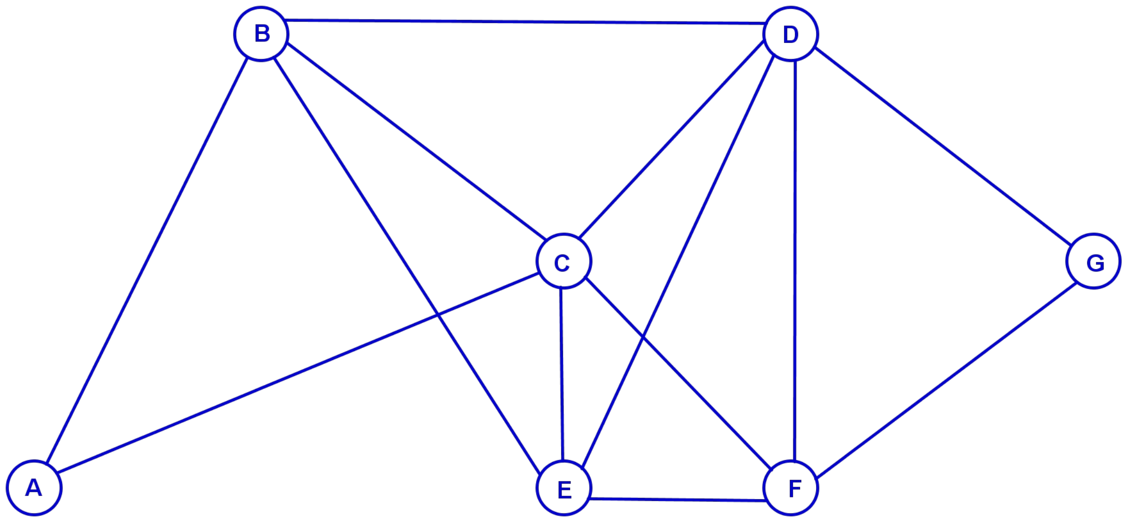
Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d 'accès principale entre deux lieux correspondants.



1. Donner sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme d'un tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

2.a. Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

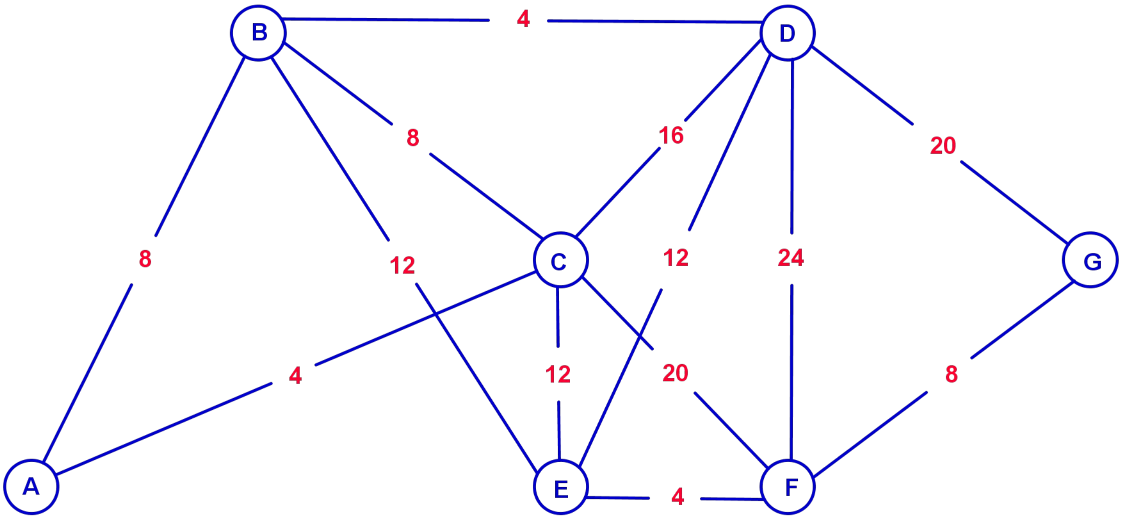
b. On donne la matrice M^3 :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.

3. Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.
Montrer qu'un tel parcours est possible.

4. Dans le graphe ci-après, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



Ce même candidat setrouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G.

a. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

b. Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

CORRECTION

1. Rappel

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

On donne le résultat sous forme de tableau (la première ligne indique l'ordre cuoisi pour les sommets.

1	2	3	4	5	6	7
A	B	C	D	E	F	G
2	4	5	5	4	4	2

2.a. La matrice M associée à ce graphe est une matrice carrée 7×7 (car le graphe à sept sommets.

$M=(m_{ij})\quad 1\leqslant i\leqslant 7\quad 1\leqslant j\leqslant 7$

m_{ij} est le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.

S'il existe une arête reliant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet alors $m_{ij}=m_{ji}=1$ sinon $m_{ij}=m_{ji}=0$.

On obtient la matrice M :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&0&0\\1&0&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&1&1&0\\0&1&1&0&1&1&1\\0&1&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

b. M^3 est une matrice carrée 7×7. $M^3=(m'_{ij})$

et m'_{ij} est le nombre de chaîne de longueur 3 reliant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet.

On nous demande le nombre de chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et F, c'est à dire le 1^{er} sommet et le $6^{ème}$ sommet.

On obtient $m'_{16}=m'_{61}=5$.

$$M^3=\begin{pmatrix}2&7&8&5&5&5&3\\7&8&12&13&12&8&5\\8&12&12&15&13&13&5\\5&13&15&12&13&12&8\\5&12&13&13&10&12&5\\5&8&13&12&12&8&7\\3&5&5&8&5&7&2\end{pmatrix}$$

Il existe donc 5 chaînes de longueur 3 reliant A et F.

En regardant le graphe on obtient les chaînes :

ACEF
ACDF
ABEF
ABDF
ABCF

3. On nous demande s'il existe une chaîne eulérienne

Rappel

une chaîne est dite eulérienne lorsqu'elle contient chaque arête du graphe une et une seule fois.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Le graphe admet 2 et 2 seulement sommets de degré impair donc il existe au moins une chaîne eulérienne.

Donc le parcours est possible, pour donner un exemple, on détermine d'abord une chaîne reliant les sommets de degré impair, ici tout simplement DE on complète en ajoutant deux cycles l'un partant de E : EBACBDCFE l'autre partant de D : DGFD on obtient : **DGFDEBACBDCFE.**

4.a. En utilisant l'algorithme de DIJKSTRA :

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	8(A)	4(A)	∞	∞	∞	∞
	8(A)	4(A)	20(C)	16(C)	24(C)	∞
	8(A)		12(B)	16(C)	24(C)	∞
			12(B)	16(C)	24(C)	32(D)
				16(C)	20(E)	32(D)
					20(E)	28(F)
						28(F)

Le plus court chemin (ou le chemin le plus rapide) est ACEFG.

b. Le temps de parcours est **28 mn.**