Exercice 3 — 6 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2;8] par :

$$f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$$

On appelle (C) sacourbe représentative dans un repère.

1. Montrer que pour tout réel de l'intervalle [0;8], on a :

$$f'(x)=\frac{-10x+32}{x^3}$$

2.a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0;8].

b. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle [2;8].

3. On appelle f'' la fonction dérivée seconde de f sur [2;8].
On admet que pour tout réel x de l'intervalle [2;8], on a :

$$f''(x)=\frac{20x-96}{x^4}$$

a. Montrer que f est une fonction convexe sur [4,8;8].

b. Montrer que le point de (C) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

4. On considère la fonction F définie sur [2;8] par :

$$F(x)=-x+10\ln(x)+\frac{10}{x}$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur [2;8].

b. Calculer $I=\int_2^8 f(x)\,dx$.

CORRECTION

1. x est un nombre réel de l'intervalle [2;8], $f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$

f est dérivable sur [2;8]

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$u(x)=-x^2+10x-16$ $\quad$ $u'(x)=-2x+10$

$v(x)=x^2$ $\quad$ $v'(x)=2x$

$$f'(x)=\frac{(-2x+10)x^2-(-x^2+10x-16)(2x)}{x^4}=\frac{-2x^3+10x^2+2x^3-20x^2+32x}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{-10x^2+32x}{x^4}=\frac{x(-10x+32)}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{-10x+32}{x^3}$$

2.a. Pour tout nombre réel de l'intervalle [2;8], on a $x^3>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-10x+32$.

$$-10x+32\geqslant 0 \Leftrightarrow 32\geqslant 10x \Leftrightarrow \frac{32}{10}\geqslant x \Leftrightarrow 3{,}2\geqslant x$$

On donne le signe $f'(x)$ sous forme de tableau

x	2		3.2		8
Signe de f ' (x)		+	0	-	

b. Tableau de variations de f

$f(2)=0$ $\quad$ $f(8)=0$ $\quad$ $f(3{,}2)=0{,}5625$

x	2		3.2		8
Signe de f ' (x)		+	0	-	
Variations de f(x)	0	↗	f(0.32)	↘	0

3.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [2;8], $f''(x)=\frac{20x-96}{x^4}$

Le signe de $f''(x)$ est le signe de 20x-96.

$$20x-96\geqslant 0 \Leftrightarrow 20x\geqslant 96 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{96}{20}=4{,}8$$

Sur l'intervalle [4,8;8], $f''(x)\geqslant 0$ donc f est convexe sur [4,8;8].

b. f'' est la fonction dérivée de f'.

On obtient les variations de f' en utilisant le signe de f''

x	2		4.8		8
Signe de f '' (x)		-	0	+	
Variations de f '(x)		↘		↗	

f' est décroissante sur [2;4,8] donc f est concave [2;4,8].

<u>Conséquence</u>

Le point J de (C) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion de (C).

4. pour tout nombre réel x de l'intervalle [2;8], $F(x)=-x+10\ln(x)+\dfrac{16}{x}$

a. F est dérivable sur [2;8]

$(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$ $\quad(-x)'=-1$ $\quad\left(\dfrac{16}{x}\right)'=-\dfrac{16}{x^2}$

$F'(x)=-1+\dfrac{10}{x}-\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{-x^2+10x-16}{x^2}=f(x)$

donc F est une primitive de f sur [2;8].

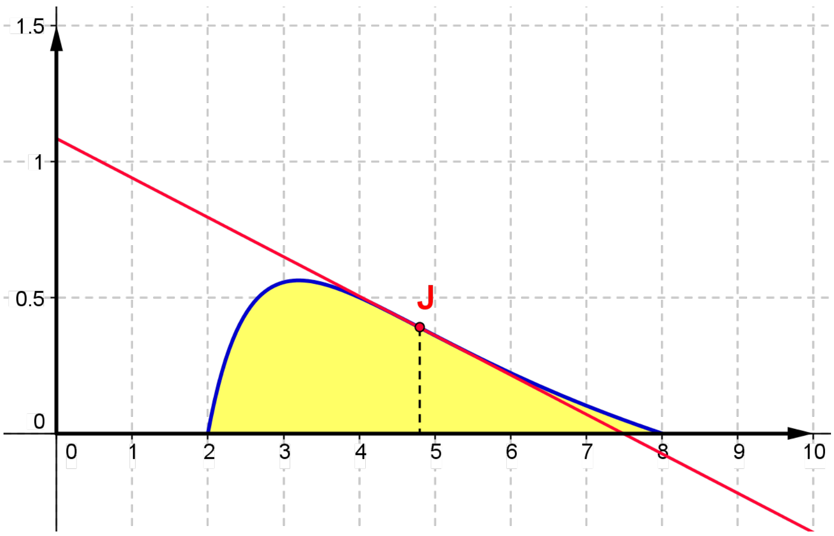
b. $I=\displaystyle\int_2^8 f(x)\,dx=F(8)-F(2)=-8+10\ln(8)+\frac{16}{8}+2-10\ln(2)-\frac{16}{2}$

$I=-8+4-8+10(\ln(8)-\ln(2))=-12+10\ln\left(\dfrac{8}{2}\right)=10\ln(4)-12$

$I=10\ln(4)-12\simeq 1{,}86$

<u>Remarque</u>

On donne la courbe (C) (non demandée)



On a tracé la tangente d'inflexion et I est l'aire en unité d'aire de la partie de plan colorée en jaune sur le dessin.