Exercice 4 — 4 points

Tous les jours, Guy joue à un jeu enligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20;120]$.

a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.

b. Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée I (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120,400)$.

a. Déterminer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire I.

b. Montrer l'équivalence : $90<\mathrm{I}<100 \Leftrightarrow -1,5<\dfrac{\mathrm{I}-120}{20}<3$

c. On définit la variable aléatoire X par $\mathrm{X}=\dfrac{\mathrm{I}-120}{20}$

Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.

d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 120 minutes, à 0,001 près.

CORRECTION

1.a. Rappel

D suit une loi uniforme sur [20;120].

Pour tous nombres réels a et b tels que $20 \leqslant a \leqslant b \leqslant 120$ ona :

$P(a \leqslant D \leqslant b) = \frac{b-a}{120-20} = \frac{b-a}{100}$

Les quatre joueurs sont réunis au bout de soixante secondes si et seulement si $20 \leqslant D \leqslant 60$.

$P(20 \leqslant D \leqslant 60) = \frac{60-20}{120-20} = \frac{40}{100}$ $= \mathbf{0{,}4}$

b. $E(D) = \frac{120+20}{2} = 70$

La durée moyenne pour réunir les quatre joueurs est de 70 secondes.

2.a. I suit la loi normale $\mathcal{N}(120{,}400)$

$\boldsymbol{\mu = 120}$ est l'espérance mathématique de I et $\sigma^2 = 400$ donc l'écart type $\sigma = \mathbf{20.}$

b. $90 < I < 180 \Leftrightarrow 90-120 < I-120 < 180-120 \Leftrightarrow -30 < \frac{I}{20} < 60 \Leftrightarrow -\frac{30}{20} < \frac{I-120}{20} < \frac{60}{20}$

$\Leftrightarrow -1{,}5 < \frac{I-120}{20} < 3$

c. $X = \frac{I-120}{20} = \frac{I-\mu}{\sigma}$

I suit la loi normale d'espérance mathématique $\mu = 120$ et d'écart type $\sigma = 20$ donc X suit la loi normale cenrée et réduite : $\mathcal{N}(0;1)$.

d. En utilisant la calculatrice on obtient :

$P(90 < I < 180) = P(-1{,}5 < X < 3)$ $= \mathbf{0{,}932}$