

Exercice 1
5 points

Cet exercice est un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Parmi les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous la seule qui est convexe est :

- a. $x^3 - 3x^2 + 4$ b. $\ln(x)$ c. $-e^x$ d. $x^2 + x + 5$

2. Une primitive de f sur $]0; +\infty[$ définie par $f(x) = \ln(x)$ est la fonction F définie par :

- a. $F(x) = \frac{1}{x}$ b. $F(x) = x \ln(x) - x$ c. $F(x) = x \ln(x)$ d. $F(x) = \ln(x)$

3. La valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 e^{2x} dx$ est égale à :

- a. 3,19 b. $e^2 - 1$ c. $\frac{1}{2}e^2$ d. $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$

4. Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1; 4)$, alors une valeur approchée au centième de $P(2 \leq X \leq 3)$ est :

- a. 0,15 b. 0,09 c. 0,34 d. 0,13

5. Dans une commune comptant plus de 100 000 habitants, un institut réalise un sondage auprès de la population. Sur 100 personnes interrogées, 55 affirment être satisfaites de leur maire.

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant de connaître la cote de popularité du maire est :

- a. $[0,35; 0,75]$ b. $[0,40; 0,70]$ c. $[0,45; 0,65]$ d. $[0,50; 0,60]$

CORRECTION

1. **Réponse d** $f(x) = x^2 + x + 5$

Justifications non demandées

- a. $f_a(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ f_a est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$
 $f'_a(x) = 3x^2 - 3x$ $f''_a(x) = 3x - 3 = 3(x - 1)$
 f''_a n'a pas un signe constant sur $]0; +\infty[$ donc f_a n'est convexe sur $]0; +\infty[$.
- b. $f_b(x) = \ln(x)$ f_b est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$
 $f'_b(x) = \frac{1}{x}$ $f''_b(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$
 f_b est concave (donc non convexe) sur $]0; +\infty[$
- c. $f_c(x) = -e^x$ f_c est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$
 $f'_c(x) = -e^x$ $f''_c(x) = -e^x < 0$
 f_c est concave (donc non convexe) sur $]0; +\infty[$
- d. $f_d(x) = x^2 + x + 5$ f_d est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$
 $f'_d(x) = 2x + 1$ $f''_d(x) = 2 > 0$
 f_d est convexe sur $]0; +\infty[$.

2. **Réponse : b** $F(x) = x \ln(x) - x$

Justifications non demandées

- a. $F(x) = \frac{1}{x}$ $F'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq f(x)$ F n'est pas une primitive de f sur $]0; +\infty[$
- b. $F(x) = x \ln(x) - x$ $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x)$
 F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$
- c. $F(x) = x \ln x$ $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 \neq f(x)$ F n'est pas une primitive de f sur $]0; +\infty[$
- d. $F(x) = \ln(x)$ $F'(x) = \frac{1}{x} \neq f(x)$ F n'est pas une primitive de f sur $]0; +\infty[$

3. **Réponse : d** $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$

Justifications non demandées

$$f(x) = e^{2x} \quad F(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

F est une primitive de f sur \mathbb{R}

$$\int_0^1 e^{2x} dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

4. **Réponse : a** 0,15

Justification non demandées

X suit la loi normale de moyenne $\mu = 1$ et d'écart type $\sigma = 2$

Il faut utiliser la calculatrice pour répondre.

On obtient : $P(2 \leq X \leq 3) \approx 0,15$

5. **Réponse : c** $[0,45; 0,65]$

Justifications non demandées

On choisit un échantillon de 100 personnes donc $n = 100$

La proportion de personnes satisfaites du maire dans l'échantillon est : $f = \frac{55}{100} = 0,55$.

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est ; $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

pour l'exemple : $\left[0,55 - \frac{1}{10}; 0,55 + \frac{1}{10} \right] = [0,45; 0,65]$