

Exercice 2

5 points

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n - 1,2$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 12$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n) .

Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- . 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- . 1200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année 2012+n.
2. Un institut de statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de belle-cité l'année 2012+n.

Variables :	a, i, n.
initialisation :	Choisir n a prend la valeur 10
Traitement :	Pour i allant de 1 à n a prend la valeur
Sortie :	Afficher a

- 3.a. Résoudre l'inéquation : $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$
- b. En donner une interprétation.

CORRECTION

Partie A

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2$.
 Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 12$ donc $u_n = v_n + 12$.

1.a. Pour tout entier naturel n

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,9u_n + 1,2 - 12 = 0,9(v_n + 12) - 10,8 = 0,9v_n + 10,8 - 10,8 = 0,9v_n$$

$$v_{n+1} = 0,9v_n \text{ et } v_0 = u_0 - 12 = 10 - 12 = -2$$

Conclusion

(v_n) est la suite géométrique de raison: **0,9** et de premier terme $v_0 = -2$.

b. Pour tout entier naturel n

$$v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 0,9^n$$

c. Pour tout entier naturel n

$$u_n = v_n + 12 = 12 - 2 \times 0,9^n$$

2. $0 < 0,9 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$

$$v_n = -2 \times 0,9^n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$u_n = 12 - v_n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \mathbf{12.}$$

Partie B

1. Si N_n est le nombre (en milliers) d'habitants de la ville de Bellecité l'année 2012+n alors le nombre d'habitants pour l'année 2012+n+1 est : $N_n - \frac{10}{100} \times N_n + 1,2 = 0,9N_n + 1,2$.

$$N_{n+1} = 0,9N_n + 1,2 \text{ et } N_0 \text{ est le nombre d'habitants (en milliers) en 2012 donc } N_0 = 10.$$

Conséquence

La suite (N_n) est la suite de premier terme $N_0 = 10$ et pour tout entier naturel n on a :

$$N_{n+1} = 0,9N_n + 1,2 \text{ et la suite } (N_n) \text{ est égale à la suite } (u_n).$$

- 2. Variables :** a, i, n.
initialisation : Choisir n
 a prend la valeur 10
Traitement : Pour i allant de 1 à n
 a prend la valeur **0,9a+1,2**
Sortie : Afficher a

Pour l'initialisation : $a = a_0 = 10$

Pour la boucle :

$$i = 1 \quad a = 0,9u_0 + 1,2 = u_1$$

$$i = 2 \quad a = 0,9u_1 + 1,2 = u_2$$

$$i = n \quad a = 0,9u_{n-1} + 1,2 = u_n$$

pour la sortie : on affiche u_n .

u_n est le nombre (en milliers) d'habitants de la ville Bellecité l'année 2012+n.

3.a. Résoudre l'inéquation : $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$ l'inconnue est l'entier naturel n .

$$\begin{aligned}1,2 - 2 \times 0,9^n > 11,5 &\Leftrightarrow 0,5 > 2 \times 0,9^n \Leftrightarrow 0,25 > 0,9^n \\ \ln \text{ est une fonction strictement croissante sur }]0; +\infty[& \\ \Leftrightarrow \ln(0,25) > \ln(0,9^n) &\Leftrightarrow \ln(0,25) > n \ln(0,9) \\ 0 < 0,9 < 1 \text{ donc } \ln(0,9) < 0 & \\ \Leftrightarrow \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)} < n &\end{aligned}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient une valeur approchée de $\frac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)} \simeq 13,16$

et n est un entier naturel.

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'inéquation : $1,2 - 2 \times 0,9^n > 11,5$ est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à 14.

- b. Le nombre d'habitants de Bellecité sera supérieur à 11,5 milliers à partir de $2012 + 14 = 2026$ 11,5 milliers est égal à 11 500.**