

**Exercice 2**
**5 points**
**Partie A**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 0,9u_n - 1,2$ .

1. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $v_n = u_n - 12$ .
  - a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
  - b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$
2. Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$  et en déduire celle de la suite  $(u_n)$ .

**Partie B**

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- . 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- . 1200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite  $(u_n)$  où  $u_n$  désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année 2012+n.
2. Un institut de statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.  
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de belle-cité l'année 2012+n.

<b>Variables :</b>	a, i, n.
<b>initialisation :</b>	Choisir n a prend la valeur 10
<b>Traitement :</b>	Pour i allant de 1 à n a prend la valeur . . . .
<b>Sortie :</b>	Afficher a

- 3.a. Résoudre l'inéquation :  $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$
- b. En donner une interprétation.

**CORRECTION**

**Partie A**

$(u_n)$  est la suite définie par  $u_0 = 10$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2$ .  
 Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 12$  donc  $u_n = v_n + 12$ .

**1.a.** Pour tout entier naturel  $n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,9u_n + 1,2 - 12 = 0,9(v_n + 12) - 10,8 = 0,9v_n + 10,8 - 10,8 = 0,9v_n$$

$$v_{n+1} = 0,9v_n \text{ et } v_0 = u_0 - 12 = 10 - 12 = -2$$

Conclusion

$(v_n)$  est la suite géométrique de raison: **0,9** et de premier terme  $v_0 = -2$ .

**b.** Pour tout entier naturel  $n$

$$v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 0,9^n$$

**c.** Pour tout entier naturel  $n$

$$u_n = v_n + 12 = 12 - 2 \times 0,9^n$$

**2.**  $0 < 0,9 < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$

$$v_n = -2 \times 0,9^n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$u_n = 12 - v_n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \mathbf{12.}$$

**Partie B**

**1.** Si  $N_n$  est le nombre (en milliers) d'habitants de la ville de Bellecité l'année 2012+n alors le nombre d'habitants pour l'année 2012+n+1 est :  $N_n - \frac{10}{100} \times N_n + 1,2 = 0,9N_n + 1,2$ .

$$N_{n+1} = 0,9N_n + 1,2 \text{ et } N_0 \text{ est le nombre d'habitants (en milliers) en 2012 donc } N_0 = 10.$$

Conséquence

La suite  $(N_n)$  est la suite de premier terme  $N_0 = 10$  et pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$N_{n+1} = 0,9N_n + 1,2 \text{ et la suite } (N_n) \text{ est égale à la suite } (u_n).$$

- 2. Variables :** a, i, n.  
**initialisation :** Choisir n  
 a prend la valeur 10  
**Traitement :** Pour i allant de 1 à n  
 a prend la valeur **0,9a+1,2**  
**Sortie :** Afficher a

Pour l'initialisation :  $a = a_0 = 10$

Pour la boucle :

$$i = 1 \quad a = 0,9u_0 + 1,2 = u_1$$

$$i = 2 \quad a = 0,9u_1 + 1,2 = u_2$$

$$i = n \quad a = 0,9u_{n-1} + 1,2 = u_n$$

pour la sortie : on affiche  $u_n$ .

$u_n$  est le nombre (en milliers) d'habitants de la ville Bellecité l'année 2012+n.

**3.a.** Résoudre l'inéquation :  $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$  l'inconnue est l'entier naturel  $n$ .

$$1,2 - 2 \times 0,9^n > 11,5 \Leftrightarrow 0,5 > 2 \times 0,9^n \Leftrightarrow 0,25 > 0,9^n$$

$\ln$  est une fonction strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0,25) > \ln(0,9^n) \Leftrightarrow \ln(0,25) > n \ln(0,9)$$

$0 < 0,9 < 1$  donc  $\ln(0,9) < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)} < n$$

En utilisant la calculatrice, on obtient une valeur approchée de  $\frac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)} \simeq 13,16$

et  $n$  est un entier naturel.

Conclusion

**L'ensemble des solutions de l'inéquation :  $1,2 - 2 \times 0,9^n > 11,5$  est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à 14.**

- b. Le nombre d'habitants de Bellecité sera supérieur à 11,5 milliers à partir de  $2012 + 14 = 2026$  11,5 milliers est égal à 11 500.**