Exercice 3 5 points

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle [5;60] par : $C(x)=\dfrac{e^{0,1x}+20}{x}$

1. On désisigne par C' la dérivée de la fonction C.

Montrer que tout réel x de l'intervalle [5;60], $C'(x)=\dfrac{0,1\,x\,e^{0,1x}-e^{0,1x}-20}{x^2}$

2. On considère la fonction f définie sur [5;60] par : $f(x)=0,1\,x\,e^{0,1x}-e^{0,1x}-20$

a. Moontrer que la fonction f est strictement croissante sur [5:60].

b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans [5;60]

c. Donner un encadrement à l'unité de α .

d. En déduire le tableau de signes de f(x) sur [5;60].

3. En déduire le tableau de variations de C sur [5;60]

4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

a. $C(x)=2$

b. $C(x)=5$

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle [5;60].
Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course est donné par la fonction C définie dans la partie A.
Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

CORRECTION

Partie A

x est un nombre réel appartenant à l'intervalle [5;60], $C(x)=\frac{e^{0,1x}+20}{x}$

1. C est dérivable sur [5;60]

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=e^{0,1x}+20 \qquad u'(x)=0,1\,e^{0,1x}$

$v(x)=x \qquad v'(x)=1$

$C'(x)=\frac{x(0,1\,e^{0,1x})-1\times(e^{0,1x}+20)}{x^2}=\frac{0,1\,x\,e^{0,1x}-e^{0,1x}-20}{x^2}$

2. x est un nombre réel appartenant à l'intervalle [5;60] : $f(x)=0,1\,x\,e^{0,1x}-e^{0,1x}-20$

a. f est dérivable sur [5;60]

$f'(x)=(0,1)^2 x\,e^{0,1x}+0,1\,e^{0,1x}-0,1\,e^{0,1x}=0,01\,x\,e^{0,1x}$

$f'(x)>0$ pour tout x appartenant à l'intervalle [5;60].

conclusion

f est est strictement croissante sur [5;60].

b. $f(5)=0,5\,e^{0,5}-e^{0,5}-20=-0,5\,e^{0,5}-20\simeq-20,8$

$f(60)=6\,e^6-e^6-20=5\,e^6-20\simeq1997,1$

f est continue et strictement croissante sur [5;60], 0 appartient à l'intervalle $[f(5);f(60)]$

le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un réel α unique tel que $f(\alpha)=0$.

c. En utilisant la calculatrice

$f(x)=0,1\,x\,e^{0,1x}-e^{0,1x}-20$

$f(10)=-20<0$; $f(20)=e^2-20<0$; $f(30)=2\,e^3-20>0$

$f(25)=1,5\,e^{1,5}-20\simeq-1,7<0$

$f(26)=1,6\,e^{2,6}-20\simeq1,5>0$

$f(\alpha)=0$

donc $f(25)<f(\alpha)<f(26)$

f est strictement croissante sur [5;60].

Donc $25<\alpha<26$

d. f est strictement croissante sur [5;60].

Si $5\leqslant x<\alpha$ alors $f(x)<f(\alpha)=0$

Si $\alpha<x\leqslant60$ alors $0=f(\alpha)<f(x)$

x	5		α		60
Signe de f(x)		$-$	0	$+$	

3. Tableau de variations de C

$C'(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ le signe de $C'(x)$ est le signe de $f(x)$ sur [5;60]

x	5		α		60
signe de C' (x)		$-$	0	$+$	
Variations de C(x)	C(5)	$\searrow$	$C(\alpha)$	$\nearrow$	C(60)

$C(5)\simeq 4{,}3$; $C(60)\simeq 7{,}1$; $C(\alpha)\simeq 1{,}3$ car $C(25)\simeq 1{,}3$ et $C(26)\simeq 1{,}3$

4.a. $C(x)=2$

- Sur l'intervalle $[5;\alpha]$ $C(5)\simeq 4{,}3$ $C(\alpha)\simeq 1{,}3$
  donc 2 appartient à l'intervalle $[C(\alpha);C(5)]$
  f est continue et strictement décroissante sur $[5;\alpha]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution ; a_1 de l'équation : $C(x)=2$ appartenant à $[5;\alpha]$.
- Sur l'intervalle $[\alpha;60]$ $C(\alpha)\simeq 1{,}3$ $C(60)\simeq 7{,}1$
  donc 2 appartient à l'intervalle $[C(\alpha);C(60)]$
  f est continue et strictement croissante sur $[\alpha;60]$, de même il existe une solution unique : a_2 de l'équation $[C(x)=2$ appartenant à $[\alpha;60]$.
- <u>Conclusion</u>
  L'équation : $C(x)=2$ admet 2 solutions a_1 et a_2 appartenant à l'intervalle $[5;60]$.

b. $C(x)=5$

- Sur l'intervalle $[5;\alpha]$ 5 n'appartient pas à l'intervalle $[C(\alpha);C(5)]$ donc l'équation $C(x)=5$ n'admet pas de solution appartenant à $[5;\alpha]$.
- Sur l'intervalle $[\alpha;60]$ 5 appartient à l'intervalle $[C(x);C(60)]$ donc l'équation $C(x)=5$ admet une unique solution b appartenant à $[\alpha;60]$.
- <u>Conclusion</u>
  L'équation : $C(x)=5$ admet une unique solution : b appartenant à $[5;60]$.

Partie B

x est un entier naturel $25<\alpha<26$ et $C(\alpha)$ est le minimum de C(x).
$C(25)>C(\alpha)$ et $C(26)>C(\alpha)$.
En utilisant la calculatrice on obtient :
$C(25)\simeq 1{,}2873$ millier d'euros
$C(26)\simeq 1{,}2871$ millier d'euros
<u>Conclusion</u>
Le coût moyen minimal est obtenu pour la fabrication de 26 vélos.