Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains.
Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories
les heures pleines (soir et week end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de
cette répartition, 70 % des heures sont creuses.
Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les événements :

- C : « L'heure est creuse »
- T : « le terrain est occupé »

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.

3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.

4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire,
a instauré, pour la location d'un terrain des tarifs différenciés :

- 10 € pour une heure pleine,
- 6 € pour heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce àla location
d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

- 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,
- 6 lorsque le terrain est loué en heure creuse,
- 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.

5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X.

6. Déterminer l'espérance de X.

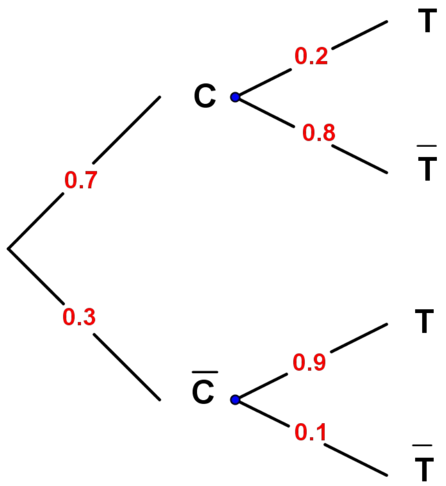
7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine.
Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

- $P(C)=0{,}7$ donc $P(\bar{C})=1-0{,}7=0{,}3$
- $P_C(T)=0{,}2$ donc $P_C(\bar{T})=1-0{,}2=0{,}8$
- $P_{\bar{C}}(T)=0{,}9$ donc $P_{\bar{C}}(\bar{T})=1-0{,}9=0{,}1$

On obtient l'arbre de probabilités suivant :



2. $P(C\cap T)=P(C)\times P_C(T)=0{,}7\times 0{,}2=0{,}14$

$P(C\cap T)$ = **0,14.**

3. En utilisant la formule des probabilités totales ou l'arbre pondéré, on obtient :

$P(T)=P(C\cap T)+P(\bar{C}\cap T)$

$P(\bar{C}\cap T)=P(\bar{C})\times p_{\bar{C}}(T)=0{,}3\times 0{,}9=0{,}27$

$P(T)=0{,}14+0{,}27=0{,}41$

$P(T)$ = **0,41**.

4. $P_T(\bar{C})=\dfrac{P(T\cap\bar{C})}{P(T)}=\dfrac{0{,}27}{0{,}41}=\dfrac{27}{41}$

5. $P(X=10)=P(\bar{C}\cap T)=0{,}27$

$P(X=6)=P(C\cap T)=0{,}14$

$P(X=0)=1-0{,}27-0{,}14=0{,}59$

ou $P(X=0)=P(\bar{T})=P(C\cap\bar{T})+P(\bar{C}\cap\bar{T})$

$P(X=0)=0{,}7\times 0{,}8+0{,}3\times 0{,}1=0{,}56+0{,}03=0{,}59$

On donne les résultats sous forme de tableau

x_i	0	6	10
$P(X=x_i)$	0.59	0.14	0.27

6. $E(X)=0\times 0{,}59+6\times 0{,}14+10\times 0{,}27=0{,}84+2{,}7=3{,}54$

$E(X)$ = **3,54**

7. La recette hebdomataire moyenne de la salle est : $3{,}54\times 70\times 10$ = **2478 €**