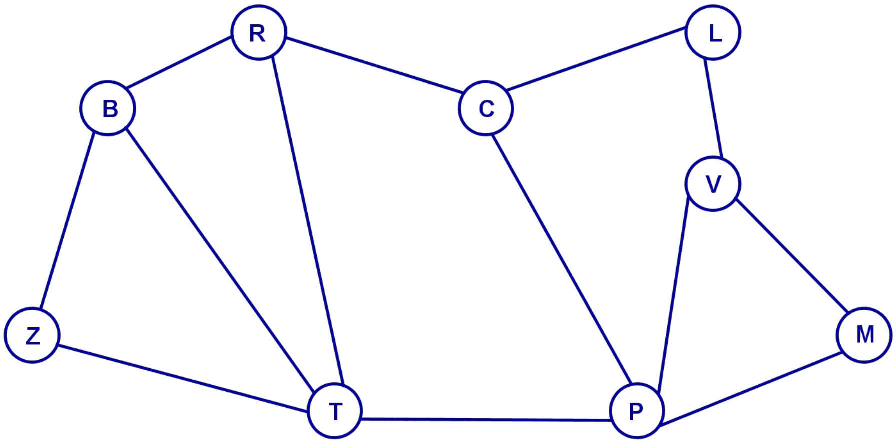
Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France :
Bordeaux (B) ; Clermont-Ferrand (C) ; Lyon (L) ; Marseille (M) ; Montpellier (P) ; Brive (R) ;
Toulouse (T) ; Valence (V) et Biarritz (Z).



Pour cette question , on justifiera chaque réponse.

1.a. Déterminer l'ordre du graphe.

b. Déterminer si le graphe est connexe.

c. Déterminer si le graphe est complet.

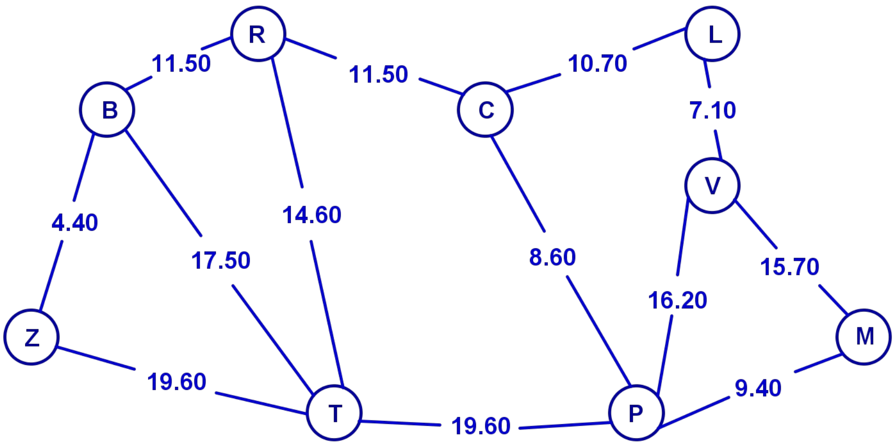
2. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.

3. Il décide finalement d'aller de lyon à biarritz.
On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique :
B, C, L, M, P, R, T, V, Z.
Voici les matrices N et N^3 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 8 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la Matrice N^4 .

b. Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.



a. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.

b. Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.

CORRECTION

1.a. **L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe.**
L'ordre du graphe donné est : **9.**

b. **Un graphe est connexe si et seulement si toute paire de sommets distinsts est reliée par au moins une chaîne.**
Le graphe donné est **connexe.**

c. **Un graphe est complet si et seulement si toute paire de points distincts est reliée par une arête.**
Il n'existe pas d'arête reliant les sommets T et C donc le graphe donné **n'est pas complet.**

2. Le touriste pourrait visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute si et seulement s'il existe une chaîne eulérienne reliant tous les sommets du graphe.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

On détermine le degré de tous les sommets :
B(3) ; C(3) ; L(2) ; M(2) ; P(4) ; R(3) ; T(4) ; V(3) ; Z(2).
Il existe 4 sommets de degré impair donc il n'existe pas de chaîne eulérienne reliant tous les sommets. **Donc le touriste ne pourra pas visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque aotoroute.**

3.a. On a : $N^4 = N \times N^3 = N^3 \times N$
Pour obtenir le coefficient de la troisième ligne et de dernière colonne de N^4 il suffit de multiplier la troisième ligne de N par la neuvième colonne de N^3 ou de multiplier la troisième ligne de N^3 par la neuvième ligne de N.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times 3 + 1 \times 1 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 3 \times 1 = 4.$$

b. Le coefficientde la troisième ligne et de la neuvième colonne de N^4 est le nombre de chaînes de longueurs 4 reliant L et Z ; (C'est à dire Lyon et Biarritz).
Les quatre chaînes de longueur 4 reliant Lyon à Biarritz sont :
LCRBZ
LCRTZ

LCPTZ
LVPTZ

4.a. On utilise l'algorithme de DIJKSTRA pour déterminant le chemin le plus court (c'est à dire coûtant le minimum).

L	B	C	M	P	R	T	V	Z
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(L)	∞	10.70(L)	∞	∞	∞	∞	7.10(L)	∞
	∞	10.70(L)	22.80(V)	23.30(V)	∞	∞	7.10(L)	∞
	∞	10.70(L)	22.80(V)	19.30(C)	22.20(C)	∞		∞
	∞		22.80(V)	19.30(C)	22.20(C)	38.90(P)		∞
	33.70(R)		22.80(V)		22.20(C)	36.80(R)		∞
	33.70(R)		22.80(V)			36.80(R)		∞
	33.70(R)					36.80(R)		38.10(B)
						36.80(R)		38.10(B)
								38.10(B)

On obtient dans l'ordre inverse : ZBRCL
Le trajet ayant le coût minimal est : **LCRBZ**

b. Le coût en euros de ce trajet est : **38,10 €.**