

Exercice 2

4 points

Pour chacune des questions posées, une proposition est faite. Il est demandé de déterminer si cette proposition est vraie ou fautive, en justifiant.

**QUESTION 1**

Un étudiant a travaillé durant l'été et dispose d'un capital de 2500€. A partir du premier septembre 2013, il place son capital  $c_0=2500$  sur un compte rapportant 0,2 % d'intérêts composés par mois et il loue une chambre qui lui coûte 425€ par mois.

On note  $c_n$  le capital disponible, exprimé en euros, au début de chaque mois. Par exemple le capital disponible au début du mois d'octobre vaudra :

$$c_1 = 1,002c_0 - 425 = 2080 \text{ euros.}$$

L'année universitaire s'achève à la fin du mois de juin 2014.

On admet que la suite des capitaux  $(c_n)$  est décrite par les relations :

- $c_0 = 2500$

- Pour tout entier naturel  $n, c_{n+1} = 1,002c_n - 425$

**PROPOSITION:** Sans apport supplémentaire l'étudiant sera à découvert à partir du début du mois de mars 2014.

**QUESTION 2 :**

Sur  $I = ]0; +\infty[$ , on définit la fonction  $f$  par  $f(x) = 2x + 1 - \ln x$

**PROPOSITION:**  $f$  est convexe sur  $I$ .

**QUESTION 3**

On définit sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$ ,  $F(x) = 2x \ln x - 2x + 5$ . On a effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel les séquences suivantes :

<b>1</b>	Dériver $((2x) \cdot \ln(x) - 2x + 5)$  $2 \cdot \ln(x) + \frac{2+x}{x} - 2$
<b>2</b>	Simplifier $(2 \cdot \ln(x) + \frac{2 \cdot x}{x} - 2)$  $\ln(x^2)$

**PROPOSITION:**  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = 2 \ln(x)$

**QUESTION 4**

$X$  est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance  $\mu = 0$  et d'écart type  $\sigma = 0,6$

**PROPOSITION :**  $P(-0,6 < X < 0,6) = 0,68$

**CORRECTION****QUESTION 1****PROPOSITION VRAIE**

Pour justifier on peut utiliser la calculatrice pour effectuer les calculs.

Premier septembre :  $c_0 = 2500\text{€}$

Premier octobre :  $c_1 = 1,002 \times 2500 - 425 = 2080\text{€}$

Premier novembre :  $c_2 = 1,002 \times 2080 - 425 = 1659,16\text{€}$

Premier décembre :  $c_3 = 1,002 \times 1659,16 - 425 = 1237,48\text{€}$

Premier janvier :  $c_4 = 1,002 \times 1237,48 - 425 = 814,95\text{€}$

Premier février :  $c_5 = 1,002 \times 814,95 - 425 = 391,58\text{€}$

premier mars :  $c_6 = 1,002 \times 391,58 - 425 = \mathbf{-32,64\text{€}}$

**Première remarque**

D'après les consignes données dans l'énoncé, au début du mois de mars l'étudiant doit payer son sixième loyer. IL doit pouvoir payer :  $6 \times 425 = 2550\text{€}$  (pour les six mois de loyer) soit 50€ en plus de son capital initial.

Il reste à évaluer les intérêts obtenus du premier septembre au premier mars.

Or au premier octobre l'étudiant a obtenu 5€ d'intérêts pour le mois de septembre.

( $c_n$ ) étant une suite décroissante les intérêts les mois suivants seront inférieurs à 5€ et l'intérêt total sera inférieur à  $6 \times 5 = 30\text{€}$

$30 < 50$  on peut donc conclure.

**Deuxième remarque**

En général le loyer doit être payé au début du mois. Donc ici, si l'étudiant place 2500€ au premier septembre alors il a aussi payé le loyer du mois de septembre.

**QUESTION 2****PROPOSITION VRAIE**

$x$  appartient à l'intervalle  $]0; +\infty[$   $f(x) = 2x + 1 - \ln x$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x} \quad \text{car} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{donc} \quad f''(x) > 0$$

**$f$  est convexe sur  $]0; +\infty[$**

**QUESTION 3****PROPOSITION VRAIE**

$x$  appartient à l'intervalle  $]0; +\infty[$   $F(x) = 2x \ln x - 2x + 5$

Le logiciel de calcul formel nous donne :

$$(1) F'(x) = 2\ln(x) + \frac{2x}{x} - 2$$

$$(2) F'(x) = \ln x^2$$

$$\text{or } \ln x^2 = 2\ln x = f(x)$$

Donc **F est une primitive de f sur ]0;+∞[**

#### QUESTION 4

#### **PROPOSITION VRAIE**

#### **Rappel cours :**

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  alors :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \mathbf{0,68}$$

Ici  $\mu = 0$  et  $\sigma = 0,6$  donc

$$P(-0,6 \leq X \leq 0,6) = \mathbf{0,68}$$

On peut retrouver le résultat en utilisant la calculatrice.