

Exercice 2

4 points

Pour chacune des questions posées, une proposition est faite. Il est demandé de déterminer si cette proposition est vraie ou fautive, en justifiant.

QUESTION 1

Un étudiant a travaillé durant l'été et dispose d'un capital de 2500€. A partir du premier septembre 2013, il place son capital $c_0=2500$ sur un compte rapportant 0,2 % d'intérêts composés par mois et il loue une chambre qui lui coûte 425€ par mois.

On note c_n le capital disponible, exprimé en euros, au début de chaque mois. Par exemple le capital disponible au début du mois d'octobre vaudra :

$$c_1 = 1,002c_0 - 425 = 2080 \text{ euros.}$$

L'année universitaire s'achève à la fin du mois de juin 2014.

On admet que la suite des capitaux (c_n) est décrite par les relations :

- $c_0 = 2500$

- Pour tout entier naturel $n, c_{n+1} = 1,002c_n - 425$

PROPOSITION: Sans apport supplémentaire l'étudiant sera à découvert à partir du début du mois de mars 2014.

QUESTION 2 :

Sur $I =]0; +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = 2x + 1 - \ln x$

PROPOSITION: f est convexe sur I .

QUESTION 3

On définit sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$, $F(x) = 2x \ln x - 2x + 5$. On a effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel les séquences suivantes :

1	Dériver $((2x) \cdot \ln(x) - 2x + 5)$ $2 \cdot \ln(x) + \frac{2+x}{x} - 2$
2	Simplifier $(2 \cdot \ln(x) + \frac{2 \cdot x}{x} - 2)$ $\ln(x^2)$

PROPOSITION: F est une primitive de la fonction f définie sur I par $f(x) = 2 \ln(x)$

QUESTION 4

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 0,6$

PROPOSITION : $P(-0,6 < X < 0,6) = 0,68$

CORRECTION**QUESTION 1****PROPOSITION VRAIE**

Pour justifier on peut utiliser la calculatrice pour effectuer les calculs.

Premier septembre : $c_0 = 2500\text{€}$

Premier octobre : $c_1 = 1,002 \times 2500 - 425 = 2080\text{€}$

Premier novembre : $c_2 = 1,002 \times 2080 - 425 = 1659,16\text{€}$

Premier décembre : $c_3 = 1,002 \times 1659,16 - 425 = 1237,48\text{€}$

Premier janvier : $c_4 = 1,002 \times 1237,48 - 425 = 814,95\text{€}$

Premier février : $c_5 = 1,002 \times 814,95 - 425 = 391,58\text{€}$

premier mars : $c_6 = 1,002 \times 391,58 - 425 = \mathbf{-32,64\text{€}}$

Première remarque

D'après les consignes données dans l'énoncé, au début du mois de mars l'étudiant doit payer son sixième loyer. IL doit pouvoir payer : $6 \times 425 = 2550\text{€}$ (pour les six mois de loyer) soit 50€ en plus de son capital initial.

Il reste à évaluer les intérêts obtenus du premier septembre au premier mars.

Or au premier octobre l'étudiant a obtenu 5€ d'intérêts pour le mois de septembre.

(c_n) étant une suite décroissante les intérêts les mois suivants seront inférieurs à 5€ et l'intérêt total sera inférieur à $6 \times 5 = 30\text{€}$

$30 < 50$ on peut donc conclure.

Deuxième remarque

En général le loyer doit être payé au début du mois. Donc ici, si l'étudiant place 2500€ au premier septembre alors il a aussi payé le loyer du mois de septembre.

QUESTION 2**PROPOSITION VRAIE**

x appartient à l'intervalle $]0; +\infty[$ $f(x) = 2x + 1 - \ln x$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x} \quad \text{car} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{donc} \quad f''(x) > 0$$

f est convexe sur $]0; +\infty[$

QUESTION 3**PROPOSITION VRAIE**

x appartient à l'intervalle $]0; +\infty[$ $F(x) = 2x \ln x - 2x + 5$

Le logiciel de calcul formel nous donne :

$$(1) F'(x) = 2\ln(x) + \frac{2x}{x} - 2$$

$$(2) F'(x) = \ln x^2$$

$$\text{or } \ln x^2 = 2\ln x = f(x)$$

Donc **F est une primitive de f sur]0;+∞[**

QUESTION 4

PROPOSITION VRAIE

Rappel cours :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ alors :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \mathbf{0,68}$$

Ici $\mu = 0$ et $\sigma = 0,6$ donc

$$P(-0,6 \leq X \leq 0,6) = \mathbf{0,68}$$

On peut retrouver le résultat en utilisant la calculatrice.