Exercice 3 5 points

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile.On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3600 poulies par semaine.On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle [0;3.6]).
Le bénéfice hebdomadaire est noté B(x), il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A:étude graphique

On a représenté en annexe 2, la fonction B dans un repère du plan.
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cents euros près selon le cas.Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13000 euros.

2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté B(x),exprimé en milliers d'euros vaut

$$B(x)=-5+(4-x)e^x$$

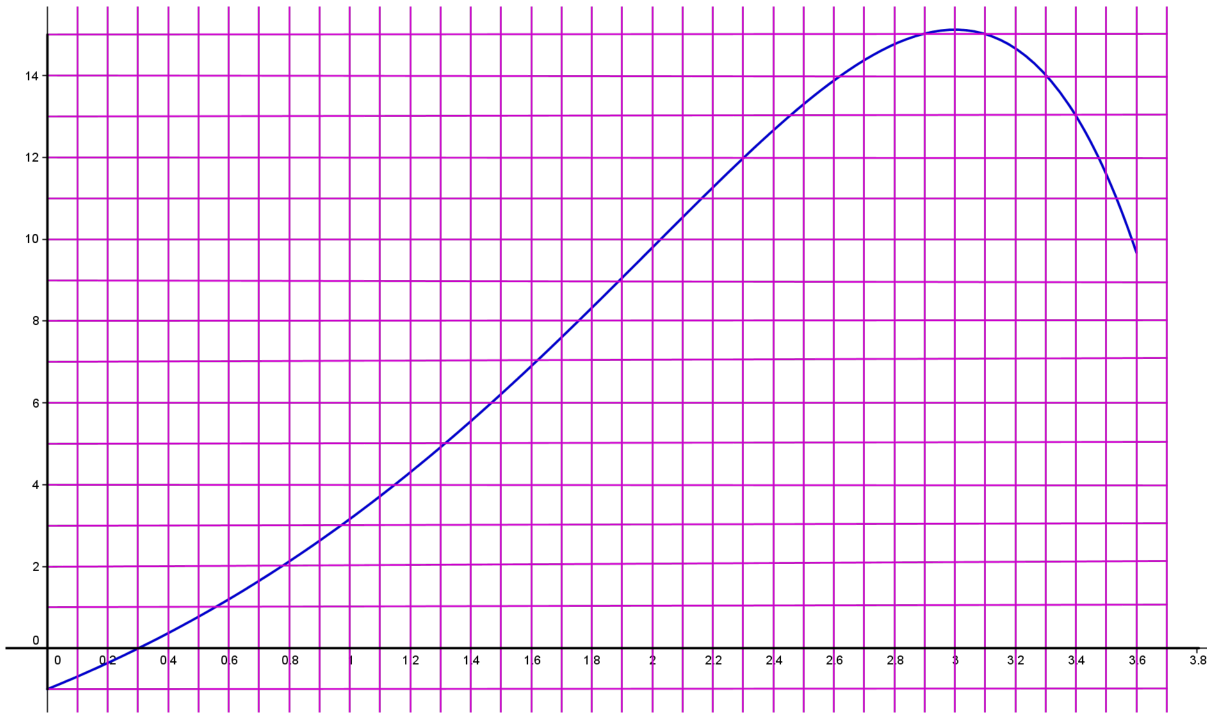
1. a. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I=|0;3.6],on a :

$$B'(x)=(3-x)e^x$$

b. Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I.
On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.

2. a. Justifier que l'équation B(x)=13 admet deux solutions x_1 et x_2 l'une dans l'intervalle [0;3] l'autre dans l'intervalle [3;3.6].
b. A l'aide de la calculatrice,déterminer une valeur approchée à0,01 près de chacune des deux solutions.

ANNEXE 2

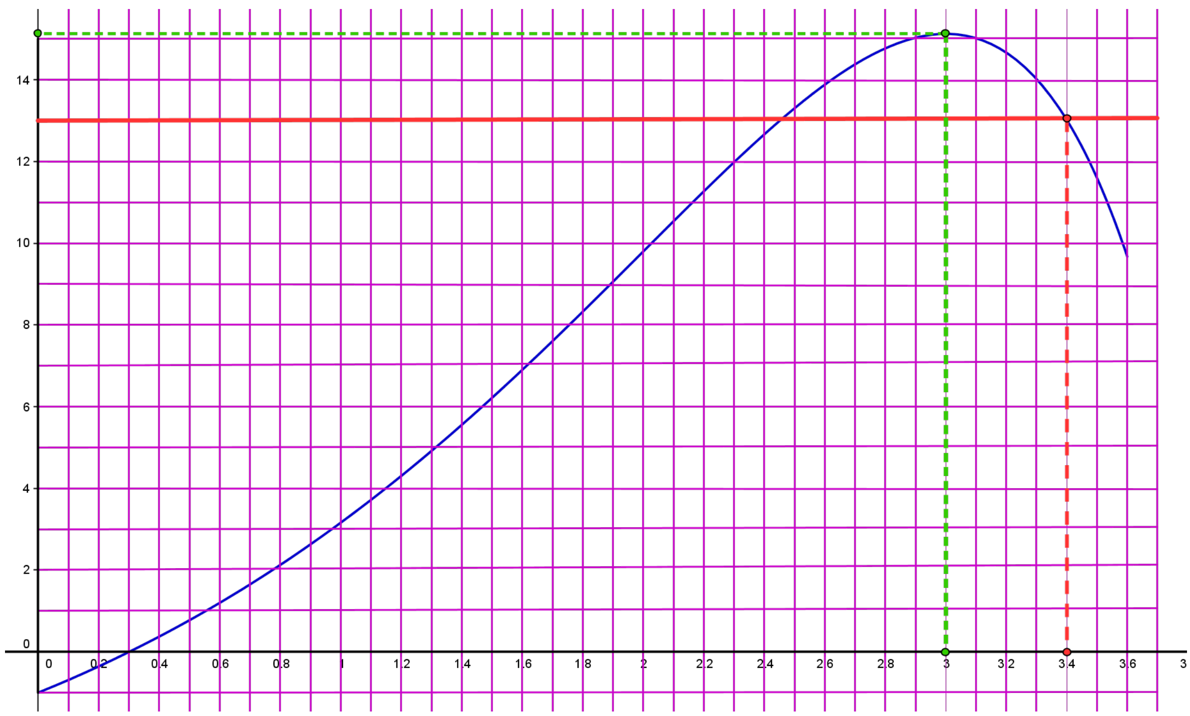


CORRECTION

PARTIE A

1 . 13000€ est égal à 13 milliers d'euros.
On trace sur la figure, donnée en annexe 2, la droite d'équation y = 13 (en rouge sur le dessin)
Cette droite d'équation y = 13 coupe la courbe représentative de B en deux points distincts d'abscisses respectives **2,46** et **3,40 .**
La courbe représentative de B est au dessus de la droite d'équation y = 13 pour x appartenant à l'intervalle [2,46;3,4] et en dessous pour les autres valeurs de x.
Donc le bénéfice est supérieur à 13000€ si et seulement si le nombre de poulies en milliers est compris entre 2,46 et 3,40 . (on arrondit à 100 poulies près)
Le nombre de poulies varie de 2500 à3400 pour avoir un bénéfice supérieur à 13000€

2 . Graphiquement on dé termine le maximum pour la fonction B on obtient :
pour x = 3 $B(x) \simeq 15{,}1$
Le bénéfice maximal est : 151000€ (obtenu pour la fabrication et la vente de 3000 poulies)



PARTIE B

$B(x) = -5 + (4 - x)e^x$ $\quad I = [0;3,6]$

1 . a. On a $(e^x)' = e^x$ et $(4 - x)' = -1$ donc $B'(x) = 0 + (-1)e^x + (4 - x)e^x$
$B'(x) = (-1+4 - x)e^x = (3 - x)e^x$

b . Le signe de B'(x) est le signe de : 3-x car pour tout nombre réel x on a $e^x > 0$
d'autre part 3 appartient à l'intervalle [0;3,6]

x	**0**		**3**		**3,6**
Signe de B'(x)		+	**0**	-	

c . B est croissante sur [0;3]
B est décroissante sur [3;3,6]
B(0) = -5 + (4 – 0)e^0 = -1
B(3,6) = -5 + 0,4$e^{3,6}$ = 9,6
B(3) est le maximum de B
B(3) = -5 +1e^3 = 15,1

Tableau de variations de B

x	0		3		3,6
$B'(x)$		+	0	–	
$B(x)$	–1	↗	15,1	↘	9,6

2 . a . B est continue et strictement croissante sur [0;3]
B(0) = -1 et B(3) = 15,1
On a $-1<13<15{,}1$
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe x_1 unique appartenant à]0;3[tel que B(x_1) = 13.
De même B est continue est strictement décroissante sur [3;3,6]
B(3) =15,1 et B(3,6) = 9,6
On a $9{,}6<13<15{,}1$
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe x_2 unique appartenant à]3;3,6[tel que B(x_2) =13.

b . Le graphique nous permet de conjecturer que $2{,}4<x_1<2{,}5$
On vérifie par le calcul $B(2{,}4)\simeq 12{,}6<13$ et $B(2{,}5)\simeq 13{,}3>13$
B est strictement croissante sur [0;3] et B(x_1) = 13 donc $2{,}4<x_1<2{,}5$
De même $B(2{,}45)\simeq 12{,}96<13$ et $B(2{,}46)\simeq 13{,}3>13$
Donc $2{,}45<x_1<2{,}46$
2,46 est une valeur approchée de x_1 à 10^{-2} près par excès
Pour x_2 $B(3{,}4)\simeq 12{,}98<13$ et $B(3{,}3)\simeq 13{,}93>13$ donc $3{,}3<x_2<3{,}4$
$B(3{,}39)\simeq 13{,}1>13$ et $B(3{,}40)\simeq 12{,}98<13$ donc $3{,}39<x_2<3{,}40$
3,40 est une valeur approchée de x_2 à 10^{-2} près par excès.