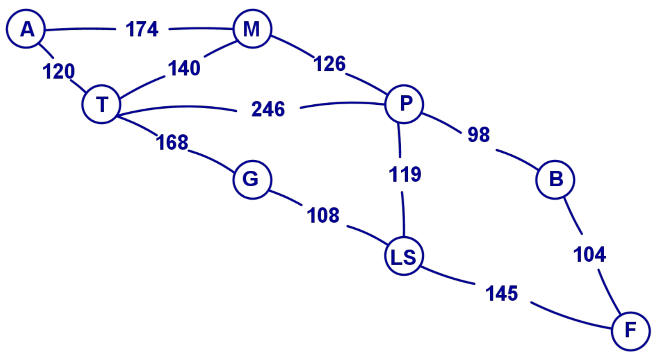
Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.
Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.
Il est établi que le trajet en camion coûte ,en carburant, 0,51 euro au kilomètre.Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussi à économiser de toucher une prime P équivalente en fin de mois .
Il consulte la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.
Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie: Aoste, Milan, Parme, Turin, Gênes, La Spézia, Bologne et Florence.Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes

Partie A : étude du trajet

1. Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence .(On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).
2. Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).
   En déduire le montant de la prime P qui sera versé en fin de mois,à l'euro près.

Partie B traversée de Parme

Durant sont trajet,le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores.
Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge. Il s'arrête.
L'expérience lui a permis d'établir que s'il seprésente à un feu,il se produit les événements suivants :

- Arrivé au feu,celui-ci est au vert (V):la probabilité que le suivant soit vert est 0,85.
- Arrivé au feu,celui-ci est orange ou rouge (R) ; la probabilité que le suivant soit vert est de 0,30

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste
2. Indiquer la matrice de transition M du graphe,en considérant les sommets dans l'ordre (V;R) en ligne comme en colonne.
3. Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc (1 0).
   a. Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$.(Le détail des calculs n'est pas demandé) .
   b. Conclure quant à la probabilité p de l'événement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu.

CORRECTION

PARTIE A : étude du trajet

1 . On se propose d'expliquer de manière détaillée l'utilisation de l'algorithme de DIJKSTRA (bien entendu ces explications ne sont pas demandées au baccalauréat).

Algorithme de DIJKSTRA

. étape 1 (initialisation)

* Dans la première ligne du tableau, on écrit tous les sommets du graphe (l'ordre des sommets est arbitraire ici pour l'exemple on place en premier le sommet initial : A et en dernier le sommet final : F entre eux les sommets sont dans un ordre quelconque).

* Dans la deuxième ligne on écrit sous le point initial : 0 et sous les autres : ∞ (correspondant aux poids affectés aux sommets).

. étape 2

* Choisir parmi les sommets ,non encore marqués, un sommet X de poids minimal.
(Si plusieurs sommets ont le même poids alors le choix parmi ces sommets est arbitraire)

* Dans la nouvelle ligne et dans la colonne X on marque définitivement ce poids minimal (ici on l'écrit en rouge) et après cette case de la colonne on n'écrira plus rien.
(pour l'exemple on mettra en couleur les cases suivantes)

. étape 3

* Pour tous les sommets Y adjacents à X qui ne sont pas définitivement marqués on calcule la somme σ du poids de X et du poids de l'arête reliant X à Y.

  * Si cette somme σ est strictement inférieure au poids de Y alors on écrit dans la case de la ligne et de la colonne Y comme poids la somme σ obtenue et on notera $\sigma(X)$.

  * Sinon on écrit dans cette case le poids précédent.

. étape 4

* S'il reste des sommets non marqués définitivement alors on repart à l'étape 2

* Sinon on passe à l'étape 5

. étape 5

On obtient le poids du plus court chemin dans la dernière ligne.
Puis on détermine le(ou un) plus court chemin obtenu.

En utilisant l'algorithme de DIJKSTRA pour l'exemple on obtient

A	M	T	P	G	B	LS	F
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	174(A)	120(A)	∞	∞	∞	∞	∞
	174(A)	120(A)	366(T)	288(T)	∞	∞	∞
	174(A)		300(M)	288(T)	∞	∞	∞
			300(M)	288(T)	∞	396(G)	∞
			300(M)		398(P)	396(G)	∞
					398(P)	396(G)	541(LS)
					398(P)		502(B)
							502(B)

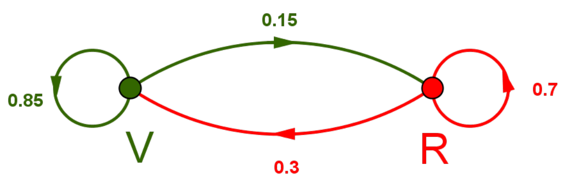
Le poids du plus court chemin est $\boxed{502}$
Le sommet précédent de F est B
Le sommet précédent de B est P
Le sommet précédent de P est M
Le sommet précédent de M est A
Le chemin le plus court est : $\boxed{\text{AMPBF}}$

conclusion : La longueur du chemin le plus court est : <u>502 kmq</u>
Les parcourues dans l'ordre sont :
AOSTE-MILAN-PARME-BOLOGNE-FLORENCE

2 . La distance parcourue pour quatre voyages (Aller-Retour)est :
d =4 x (2 x 502) = 4016 km
Le budget pour ces quatre voyages (Aller-Retour) est :
0,51 x 4016 = 2048,16 €
Arrondi à l'euro près : $\boxed{2048\text{ €}}$
Le montant de la prime est :
2200 – 2048 = $\boxed{152\text{ €}}$

<u>PARTIE B :</u> traversée de PARME

1 . L'énoncé donne :
$P_V(V) = 0,85$ donc $P_V(R) = 1 - 0,85 = 0,15$
$P_R(V) = 0,3$ donc $P_R(R) = 1 - 0,3 = 0,7$
On obtient le graphe probabiliste suivant:



2 . La matrice M de transition du graphe probabiliste est une matrice carrée 2 x 2.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$ L'ordre des sommets est V puis R

m_{11} est le poids de l'arête : VV
$m_{11} = P_V$ (V) = 0,85

m_{12} est le poids de l'arête : VR
$m_{12} = P_V$ (R) = 0,15

m_{21} est le poids de l'arête : RV
$m_{21} = P_R$ (V) = 0,3

m_{22} est le poids de l'arête : RR
$m_{22} = P_R$ (R) = 0,7

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

3 . a . $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ car le premier feu est vert.

$$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \times 0{,}85 + 0 \times 0{,}3 & 1 \times 0{,}15 + 0 \times 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P_2 = (0{,}85 \quad 0{,}15)}$$

$$P_3 = P_2 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$P_3 = (0{,}85 \times 0{,}85 + 0{,}15 \times 0{,}3 \quad 0{,}85 \times 0{,}15 + 0{,}15 \times 0{,}7)$

$P_3 = (0{,}7225 + 0{,}045 \quad 0{,}1275 + 0{,}105)$

$$\mathbf{P_3 = (0{,}7695 \quad 0{,}2325)}$$

b . La probabilité p de l'événement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu rouge » est la probabilité que le troisième feu soit rouge.

$$\boxed{\mathbf{P = 0{,}2325}}$$