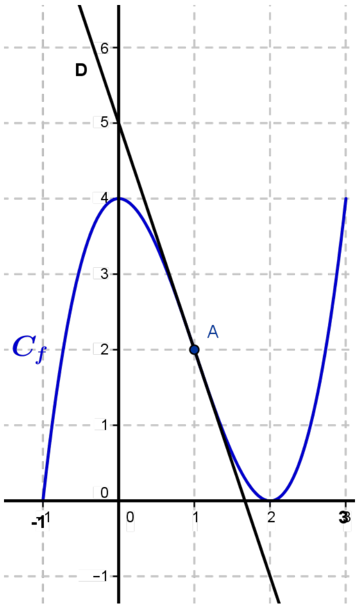
Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle [-1;3] ,deux fois dérivable sur cet intervalle et dont la représentation C_f dans un repère orthonormé est proposée ci-dessous.
On désigne par f' la fonction dérivée de f,par f'' la fonction dérivée seconde de f, par F une primitive de f (on admet l'existence de F).
La droite D est tangente à C_f au point A d 'abscisse 1, seul point en lequel la courbe traverse la tangente.
L'axe des abscisses est tangent à C_f au point d'abscisse 2.
La tangente à C_f au point d'abscisse 0 est la droite d'équation y = 4.



Pour chacune des questions ci-dessous,une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la proposition choisie.
Une réponse juste apporte un point. Une réponse fausse,une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1 . a . f est convexe sur l'intervalle [-1;0]
b . f est concave sur l'intervalle [1;2]
c . f est convexe sur l'intervalle [1;3]
d . C_f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse -1.

2 . a . f(1) = 5
b . f '(1) = 2
c . f "(1) = -3
d . La tangente à C_f au point d'abscisse 1 a une équation y = -3x+5

3 . a . f '(x) > 0 pour tout x de l'intervalle [-1;2]
b . f 'est croissante sur l'intervalle [1;2]
c . f(x) = 0 si et seulement si x = 0 ou x = 2
d $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle [-2 ;-1]

4 . a . $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx < 0$

b . $3 < \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x < 6$

c . $\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

d . La valeur moyenne de f sur l'intervalle [0;2] est égale à 1

5 . a . f ' est croissante sur l'intervalle [-1;2].
b . F est croissante sur l'intervalle [-1;2].
c . f est croissante sur l'intervalle [-1;2].
d . F(1) > F(2)

CORRECTION

1 . $\boxed{\textbf{proposition c}}$

justifications non demandées

Rappels

. Une fonction f deux fois dérivable sur [a;b] ($a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$; $a < b$) est convexe sur [a;b] si et seulement si sa courbe représentative : C_f est au dessus de sa tangente en $M_0(x_0 ; f(x_0))$ pour tout $x_0 \in [a;b]$.

. Une fonction f deux fois dérivable sur [a;b] est convexe sur [a;b] si et seulement si $f''(x_0) \geqslant 0$ pour tout $x_0 \in [a;b]$.

. Une fonction f deux fois dérivable sur [a;b] est concave sur [a;b] si et seulement si sa courbe représentative : C_f est en dessous de sa tangente en $M_0(x_0;f(x_0))$ pour tout $x_0 \in [a;b]$.

. Une fonction f deux fois dérivable sur [a;b] est concave sur [a;b] si et seulement si $f''(x_0) \leqslant 0$ pour tout $x_0 \in [a;b]$.

a . f est convexe sur l'intervalle [-1;0]

proposition fausse

C_f est en dessous de sa tangente en M_0 $(x_0;f(x_0))$ pour tout $x_0 \in [-1;0]$ donc f est concave sur cet intervalle.

b. f est concave sur l'intervalle [1;2].

proposition fausse

On remarque que f est convexe sur [1;2].

c . f est convexe sur [1;3]

proposition vraie

C_f est dessus de sa tangente en M_0 $(x_0;f(x_0))$ pour tout $x_0 \in [1;3]$.

d. C_f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse : -1.

proposition fausse

C_f est au dessous de sa tangente en $M_0(-1;0)$.

2 . $\boxed{\textbf{proposition d}}$

justifications non demandées

a . f(1) = 5

proposition fausse

car f(1) = 2

b . f '(1) = 2

proposition fausse

car le coefficient directeur de la tangente en A(1;2) à C_f est négatif donc f '(1) < 0.

c . $f''(1) = -3$

proposition fausse

car la droite D est tangente à C_f en A(1;2) et C_f traverse D en A.

f est deux fois dérivable sur [-1:3] et A est un point d'inflexion de C_f et $f''(1)=0$

d . La tangente à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation : y = -3x + 5.

proposition vraie

D coupe l'axe des ordonnées au point B(0;5) donc D est la droite (AB).

Le coefficient directeur de D est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-2}{0-1} = -3$

D : y = -3x + p

$B \in D$: 5 = -3 x 0 +5 et p = 5

$\boxed{\textbf{D : y = -3x + 5}}$

3 . $\boxed{\textbf{proposition b}}$

justifications non demandées

a . f '(x) > 0 pour tout x de l'intervalle]0;2].

proposition fausse

car sur l'intervalle]0;2] la fonction est décroissante donc $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle [0;2].

b . f ' est croissante sur l'intervalle [1;2].

proposition vraie

La fonction f est convexe sur [1;2] et f est deux fois dérivable sur [1;2] donc pour tout x∈]1;2] on a $f''(x) \geqslant 0$ et f ' est croissante sur]1;2]

c . f(x) = 0 si et seulement si x = 0 ou x = 2

proposition fausse

car f(0) = 1 (Remarque : il ne faut pas confondre f et f ')

d . $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle [-2 ;-1]

proposition fausse

f n'est pas définie sur l'intervalle [-2 ;-1[.

4 . $\boxed{\textbf{proposition b}}$

justifications non demandées

a . $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx < 0$

proposition fausse

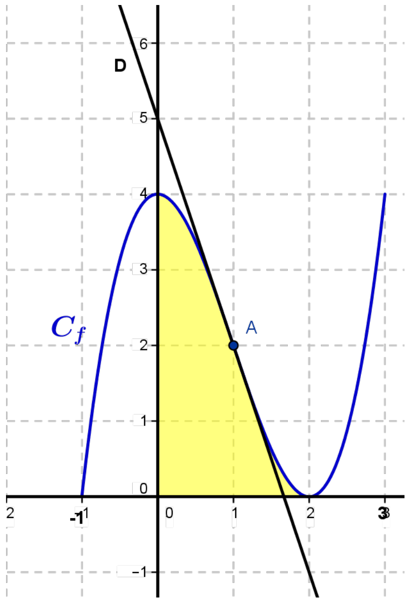
C$_f$ est au dessus de l'axe des abscisses sur [-1;3] donc f est positive sur [-1;3] donc sur [-1;0] et le théorème de « **la positivité** » de l'intégrale nous permet d'affirmer que ;

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \geqslant 0$

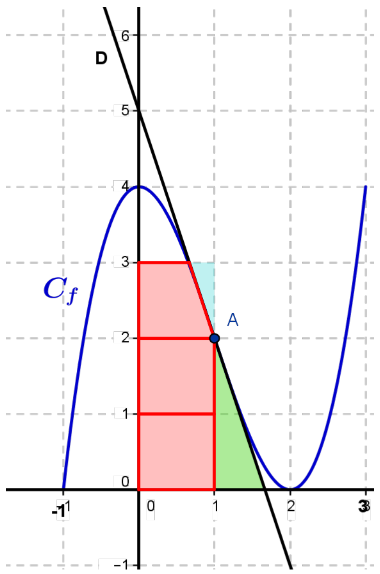
b . $3 < \int_{0}^{2} f(x)\,dx < 6$

proposition vraie

f est continue est positive sur [0;2] donc $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ est l'aire en unités d'aire de la partie de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses,la courbe **C**$_f$ et les droites d'équations : x = 0 et x = 2 (partie colorée en jaune sur la figure suivante)



L'unité d'aire est l'aire du carré (car le repère choisi est orthonormé) de côté l'unité de longueur.

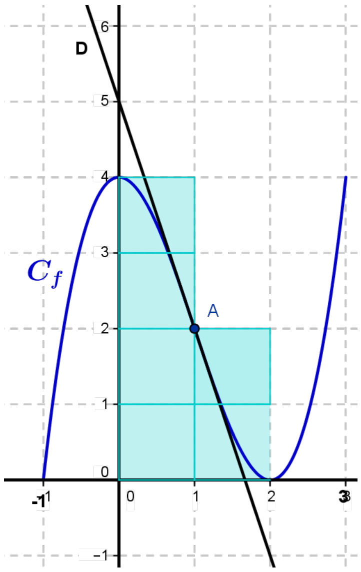


En considérant le dessin précédent,on peut affirmer que l'aire de la partie colorée en bleu est strictement inférieure à l'aire de la partie colorée en vert.

0n en déduit que l'aire de la partie colorée en jaune est strictement supérieure à l'aire de 3 carrés de côté 1 soit 3 U.A.

donc $3 < \int_0^2 f(x)\,dx$

D'autre part



6 U.A. est l'aire de la partie colorée en bleu ,celle-ci est strictement supérieure à l'aire de la partie colorée en jaune.

Conclusion : $3 < \int_0^2 f(x)\,dx < 6$

c . $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx$

proposition fausse

(Remarque : il est difficile de démontrer l'égalité de deux intégrales que l'on ne sait pas calculer mais cela est parfois possible ,par exemple si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que l'on choisisse deux intervalles symétriques par rapport à 0).

Ici on remarque que l'aire de la partie de plan comprise entre $\mathbf{C_f}$ **,** l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = -1 et x = 0 est strictement inférieure à l'aire de la partie de plan comprise entre $\mathbf{C_f}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations ; x = 0 et x = 2.

d . La valeur moyenne de f sur l'intervalle [0;2] est égale à 1.

proposition fausse

Rappel : la valeur moyenne de la fonction continue f sur l'intervalle [a;b] (a<b) est

le nombre $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Ici $\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx$ or nous avons démontré que : $3 < \int_0^2 f(x)\,dx$

donc $\frac{3}{2} < \mu$ et $\mu \neq 1$

5 . **proposition b**

justifications non demandées

a . f ' est croissante sur l'intervalle [-1;2].

proposition fausse

Nous avons vu que f est concave sur [-1;0] et f est deux fois dérivable donc $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [-1;0]$ et f ' est décroissante sur [-1;0].

b . F est croissante sur l'intervalle [-1;2].

proposition vraie

Rappel : si F est une primitive de f sur l'intervalle [-1;3] alors f est dérivable sur l'intervalle [-1;3] et F'(x) = f(x) pour tout $x \in [-1;3]$.

La fonction f est positive sur [-1;3] donc sur [-1;2] et F est croissante sur [-1;2].

c . f est croissante sur l'intervalle [-1;2]

proposition fausse

Car f est décroissante sur [0;2]

d . F(1) > F(2)

proposition fausse

F est croissante sur [-1;2]

$1 < 2$ donc $F(1) \leqslant F(2)$

Remarque :

$F(2) - F(1) = \int_1^2 f(x)\,dx$ et $\int_1^2 f(x)\,dx > 0$