Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes

Un lycée d'une grande ville de province organise un forum des grandes écoles de la région pour aider ses élèves dans leurs choix d'orientation post-bac.

PARTIE A

Une des écoles a effectué une étude sur la mobilité des étudiants de la promotion de 2008 en ce qui concerne le choix de carrière.
Elle a relevé qu'en 2008, à la fin de leurs études, 25 % des diplômés sont partis travailler à l'étranger alors que le reste de la promotion a trouvé du travail en France.
On a observé ensuite qu'à la fin de chaque année, 20 % des personnes ayant opté pour l'étranger re- viennent sur un poste en France alors que 10 % des personnes travaillant en France trouvent un pos-te à l'étranger. On considère que cette situation perdure.
On note $P_n = (\, e_n \quad l_n \,)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste en 2008 + n avec e_n la probabilité que la personne travaille à l'étranger, l_n celle qu'elle travaille en France.
Ainsi $P_0 = (\, 0{,}25 \quad 0{,}75 \,)$

1 . Proposer le graphe probabiliste associé à cette situation.
On désignera par E (étranger) et F (France) les deux sommets.

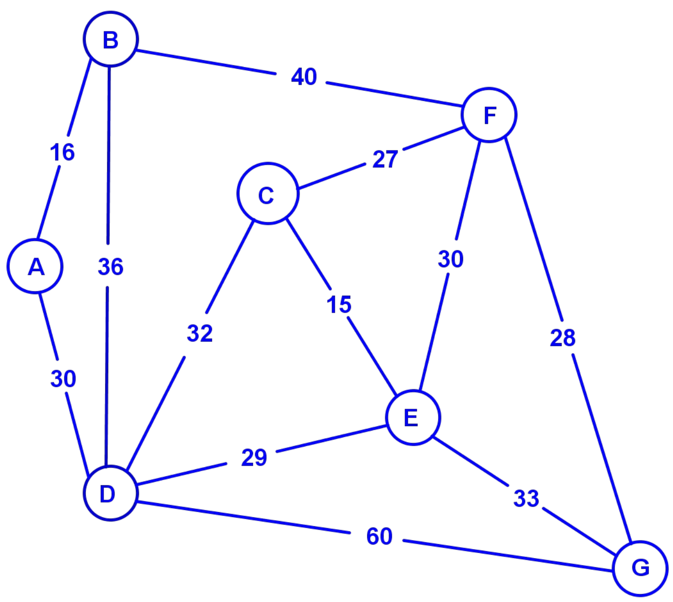
2 . Donner la matrice de transition M associée en prenant les sommets dans l'ordre E puis F.

3 . Montrer qu'en 2011 la proportion des étudiants de la promotion 2008 travaillant à l'étranger est : 30,475 %.

4 . Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu.

PARTIE B

Pour clôturer cette journée, un groupe de lycéens musiciens a décidé d'organiser un concert.
Ils décident de faire le tour de tous les lycées de la ville et de distribuer des prospectus sur le trajet pour faire de la publicité pour cette soirée.
Les membres du groupe ont établi le graphe ci-dessous.



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Les sommets représentent les différents lycées et les arêtes, les rues reliant les établissements.
Les arêtes sont pondérées par les durées des trajets entre deux sommets consécutifs,exprimés en minutes.

1 . Existe-t-il un trajet d'un lycée à un autre permettant de parcourir toutes les rues une fois et une seule ?
Si oui, donner un tel trajet,si non expliquer pourquoi.

2 . Arrivé en retard au lycée A, un membre du groupe veut trouver le chemin le plus rapide pourquoi rejoindre ses camarades au lycée G.
Quel trajet peut-il prendre ?
Quelle est la durée du parcours ?

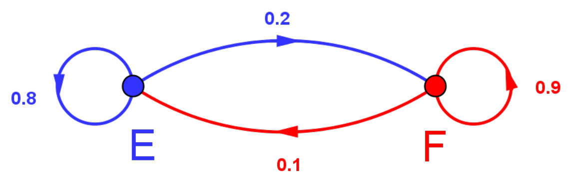
Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

PARTIE A

1 . Les sommets du graphe sont E (étranger) et F (France).
L'énoncé précise :
20 % des personnes ayant poté pour l'étranger reviennent sur un poste en France alors que 10 % des personnes travaillant en France trouvent un poste à l'étranger.
Donc
80 % des personnes ayant opté pour l'étranger restent à l'étranger et 90 % des personnes travaillant en France restent en France.

Conséquences
Le poids de l'arête EF est 0,2
Le poids de l'arête EE est 0,8
Le poids de l'arête FE est 0,1
Le poids de l'arête FF est 0,9
On obtient donc le graphe probabiliste suivant :



2 . L'ordre des sommets du graphe est : E et F.
La matrice de transition M associée au graphe probabiliste précédent est une matrice carrée 2x2

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

m_{11} est le poids de l'arête : EE soit 0,8
m_{12} est le poids de l'arête : EF soit 0,2
m_{21} est le poids de l'arête : FE soit 0,1
m_{22} est le poids de l'arête : FF soit 0,9

donc $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

3 . 2011 = 2008 + **3** n = **3**
L'énoncé donne $P_0 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$
$P_1 = P_0 \times M$; $P_2 = P_1 \times M$; $P_3 = P_2 \times M$ ou $P_3 = P_0 \times M^3$
Pour calculer P_3 en utilisant la calculatrice,on peut donc d'abord calculer P_1 et P_2 et en déduire P_3 ou bien calculer M^3 et en déduire directement P_3.

$P_1 = (e_1 \ \ l_1) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

$e_1 = 0,25 \times 0,8 + 0,75 \times 0,1 = 0,275$
$l_1 = 0,25 \times 0,2 + 0,75 \times 0,9 = 0,725$

$P_1 = \begin{pmatrix} 0,275 & 0,725 \end{pmatrix}$ $e_1 + l_1 = 1$

$P_2 = (e_2 \ \ l_2) = \begin{pmatrix} 0,275 & 0,725 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

$e_2 = 0,275 \times 0,8 + 0,725 \times 0,1 = 0,2925$
$l_2 = 0,275 \times 0,2 + 0,725 \times 0,9 = 0,7075$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2925 & 0{,}7075 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 + l_2 = 1$

$P_3 = (\, e_3 \quad l_3 \,) = \begin{pmatrix} 0{,}2925 & 0{,}7075 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

$e_3 = 0{,}2925 \times 0{,}8 + 0{,}7075 \times 0{,}1 = 0{,}30475$
$l_3 = 0{,}2925 \times 0{,}2 + 0{,}7075 \times 0{,}9 = 0{,}69525$

$P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}30475 & 0{,}69525 \end{pmatrix}$ $\quad e_3 + l_3 = 1$

Donc la probabilité qu'un étudiant de la promotion 2008 travaille à l'étranger en 2011 est :

$\mathbf{e_3 = 0{,}30475}$

La proportion des étudiants de la promotion 2008 travaillant à l'étranger en 2011 est :

30,475 %

Si on calcule directement M^3 en utilisant la calculatrice on obtient :

$\mathbf{M^3} = \begin{pmatrix} 0{,}562 & 0{,}438 \\ 0{,}219 & 0{,}781 \end{pmatrix}$

$P_3 = (\, e_3 \quad l_3 \,) = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}562 & 0{,}438 \\ 0{,}219 & 0{,}781 \end{pmatrix}$

$e_3 = 0{,}25 \times 0{,}562 + 0{,}75 \times 0{,}219 = 0{,}30475$
$l_3 = 0{,}25 \times 0{,}438 + 0{,}75 \times 0{,}781 = 0{,}69525$

Donc la proportion des étudiants de la promotion de 2008 travaillant à l'étranger est :

30,475 %

3 . On dit qu'un état probabiliste est <u>**stable**</u> s'il reste invariant dans la répétition décrite par le graphe probabiliste de matrice de transition **M .**

On a : P = PM

Pour calculer P , on pose $P = (\, x \quad 1 - x \,)$ $\quad x \in [0;1]$

et on résout $(\, x \quad 1 - x \,)M = (\, x \quad 1 - x \,)$

$$(\, x \quad 1 - x \,)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (\, 0{,}8x + 0{,}1 - 0{,}1x \quad 0{,}2x + 0{,}9 - 0{,}9x \,) = (\, 0{,}7x + 0{,}1 \quad -0{,}7x + 0{,}9 \,)$$

$$P = PM \quad .\Leftrightarrow. \quad \begin{cases} 0{,}7x + 0{,}1 = x \\ -0{,}7x + 0{,}9 = 1 - x \end{cases} \quad .\Leftrightarrow. \quad \{\, 0{,}1 = 0{,}3x \quad .\Leftrightarrow. \quad x = \frac{1}{3}$$

L'état stable $P = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \right)$

Dans un futur lointain, un tiers des étudiants de la promotion 2008 travailleront à l'étranger.

<u>PARTIE B</u>

1 . On nous demande si le graphe admet une **chaîne eulérienne.**

> Théorème d' Euler
> Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

B est de degré 3
C est de degré 3
D est de degré 5
G est de degré 3

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Conclusion

Il n'existe pas un trajet d'un lycée à un autre permettant de parcourir toutes les rues une fois et une seule.

2 . On peut trouver le chemin le plus rapide pour joindre **A** à **G**.
Chemin : **ABFG** et la durée de parcours est 84 mn (1H 24mn)
Maintenant on se propose de retrouver ce résultat en utilisant l'algorithme de DIJKSTRA.

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	16(A)	∞	30(A)	∞	∞	∞
	16(A)	∞	30(A)	∞	56(B)	∞
		62(D)	30(A)	59(D)	56(B)	90(D)
		62(D)		59(D)	56(B)	84(F)
		62(D)		59(D)		84(F)
		62(D)				84(F)
						84(F)

On obtient le chemin dans l'ordre inverse : **GFBA**
Le chemin le plus rapide est **ABFG** et la durée du parcours est **84mn** soit **1H 24mn**

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés