Exercice 3 5 points

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [-10;30] par : $f(x) = 5 + xe^{0,2x-1}$
On admet que f est dérivable sur cet intervalle et admet des primitives sur cet intervalle.

1 . Soit f ' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [-10;30], $f'(x) = (0,2x + 1)e^{0,2x-1}$.

2 . En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle [-10;30].

3 . Justifier que l'équation f(x) = 80 admet une solution unique α dans l'intervalle [0;20] et donner un encadrement de α à 0,1 près.

4 . Soit F la fonction définie sur [-10;30] par : $F(x) = 5(x-5)e^{0,2x-1} + 5x$
On admet que F est une primitive de f dans l'intervalle [-10;30].

a . Calculer la valeur exacte de $I = \int_5^{10} f(x)\,dx$.

b . En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [5;10].
(On donnera une valeur arrondie au centième.)

PARTIE B

En 2010 un styliste a décidé d'ouvrir des boutiques de vêtements à prix modérés, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et au niveau mondial.
Il a utilisé la fonction f définie dans la partie A mais seulement sur l'intervalle [0;20] pour modéliser son développement et a désigné par f(x) le nombre de magasins de son enseigne existant en 2010 + x.

1 . Calculer f(0) et interpréter le résultat.

2 . En utilisant la partie A, indiquer à partir de quelle année la chaîne possédera 80 boutiques.

3 . Chaque magasin a un chiffre d'affaires journalier moyen de 2500 euros.

Si on considère qu'un magasin est ouvert 300 jours par an, calculer à la centaine d'euros près, le chiffre d'affaires annuel moyen que le styliste peut espérer pour l'ensemble de ses boutiques entre 2015 et 2020.

CORRECTION

PARTIE A

$x \in [-10;30]$ $f(x) = 5 + xe^{0,2x-1}$

1 . $\mathbf{(e^u)' = u'e^u}$

$u(x) = 0,2x - 1$ $u'(x) = 0,2$

$(e^{0,2x-1})' = 0,2e^{0,2x-1}$

et $f'(x) = e^{0,2x-1} + x(0,2e^{0,2x-1})$

$$\mathbf{f'(x) = (1 + 0,2x)e^{0,2x-1}}$$

2 . Le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 + 0,2x$ car pour tout nombre réel x on a : $e^{0,2x-1} > 0$

$$1+0,2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{0,2}=-5$$

$$1+0,2x>0 \Leftrightarrow x>-5$$

$$1+0,2x<0 \Leftrightarrow x<-5$$

f est strictement décroissante sur [-10 ;-5]
et f est strictement croissante sur [-5 ;30]

3 . $[0;20] \subset [-5;30]$ donc f est continue et strictement croissante sur [0;20].

$f(0) = 5$ et $f(20) = 5 + e^3$ on a $f(20) \simeq 407$

$80 \in [f(5) ; f(20)]$

donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 80 admet un unique antécédent α par f appartenant à [0;20].

En utilisant la calculatrice on obtient :

$f(13,5) \simeq 78,90$ et $f(13,6) \simeq 80,95$

or $f(\alpha) = 80$ et $\alpha \in [0;20]$

$f(13,5) < f(\alpha) < f(13,6)$

f est strictement croissante sur [0;20] donc

$$\boxed{\mathbf{13,5 < \alpha < 13,6}}$$

4 . a. $x \in [-10;30]$ $F(x) = 5(x-5)e^{0,2x-1} + 5x$

F est une primitive de f sur [-10;30]

$$I = \int_5^{10} f(x)\,dx = F(10) - F(5) = 5 \times 5e + 50 - 5 \times 5 = 25e + 25$$

$$\boxed{\mathbf{I = 25e + 25}}$$

b . La valeur moyenne de f sur [5;10] est égale :

$$\mu = \frac{1}{5}\int_5^{10} f(x)\,dx = \frac{1}{5}(25e + 25) = 5e + 5$$

$\boxed{\mathbf{\mu = 5e+5}}$ et $\mu \simeq 18,59$

PARTIE B

1 . $f(0) = 5$
En 2010, le styliste a 5 magasins de son enseigne.

2 . On a $f(\alpha) = 80$ avec $13{,}5 < \alpha < 13{,}6$
donc $13 < \alpha < 14$
et f est strictement croissante sur [0;20].
En 2024 = 2010 + 14 la chaîne possédera 80 boutiques pour la première année.

3 . Le chiffre d'affaires annuel d'un magasin est :
2500 x 300 = 750000€

Pour le chiffre d'affaires annuel moyen que le styliste peut espérer pour l'ensemble de ses boutiques entre 2015 et 2020 il faut déterminer le nombre moyen de magasins par an de 2015 à 2020 :N.

$$N = \frac{1}{5}\int_5^{10} f(x)\,dx = \mu$$

$N \simeq 18{,}59$

Le chiffre d'affaires annuel moyen :C que le styliste peut espérer pour l'ensemble de ses boutiques entre 2015 et 2020 est :
C = N x 750000

C = 13942500 € (à la centaine près)