Exercice 4 — 5 points

Le responsable du foyer des jeunes d'un village a décidé d'organiser une brocante annuelle.
Pour la première brocante en 2012,il a recueilli 110 inscriptions.
D'après les renseignements pris auprès d'autres organisateurs dans les villages voisins,il estime que d'une année sur l'autre,90 % des exposants se réinscriront et que 30 nouvelles demandes seront déposées.
On désigne par u_n le nombre d'exposants en (2012 + n) avec n entier naturel.
Ainsi u_0 est le nombre d'exposants en 2012,soit $u_0 = 110$.

1 . Quel est le nombre d'exposants attendu pour 2013 ?

2 . Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 30$.

3 . Vu la configuration actuelle de la manifestation dans le village,le nombre d'exposants ne peut pas excéder 220.
Recopier et compléter l'algorithme proposé ci-dessous afin qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle l'organisateur ne pourra pas accepter toutes les demandes d'inscription.

```
Variables :          u est un nombre réel
                     n est un nombre entier naturel

Initialisation :     Affecter à u la valeur ….
                     Affecter à n la valeur 2012

Traitement :         Tant que …
                          Affecter à u la valeur …
                          Affecter à n la valeur n + 1

SORTIE :             Afficher ...
```

4 . Pour tout entier naturel n,on pose $v_n = u_n - 300$

a . Démontrer que la suite géométrique de raison 0,9

b . En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = -190 \times 0,9^n + 300$

c . Déterminer le résultat recherché par l'algorithme de la question 3 en résolvant une inéquation.

5 . L'organisateur décide d'effectuer une démarche auprès de la mairie pour obtenir assez de place pour ne jamais refuser d'inscriptions.Il affirme au maire qu'il suffit de lui autoriser 300 emplacements.A-t-il raison de proposer ce nombre? Pourquoi ?

CORRECTION

1 . $110 \times \frac{90}{100} + 30 = 99 + 30 = \underline{\mathbf{129}}$

Le nombre d'exposants attendu pour 2013 est : **<u>129</u>**

2 . Pour tout entier naturel n,le nombre d'exposants en 2012 + n+1 est égal à 90 % du nombre d'exposants en 2012 + n augmenté de 30 donc

$\mathbf{u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30}$

3 .

Variables : u est un nombre réel
n est un nombre entier naturel

Initialisation : Affecter à u la valeur **<u>110</u>**
Affecter à n la valeur 2012

Traitement : Tant que **$u \leqslant 220$**
Affecter à n la valeur n+1

Sortie : Afficher **<u>n</u>**

4 . a . Pour tout entier n : $v_n = u_n - 300$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 300 = 0{,}9u_n + 30 - 300 = 0{,}9u_n - 270$

on a $u_n = v_n + 300$

$v_{n+1} = 0{,}9(v_n + 300)\ 270 = 0{,}9v_n + 270 - 270$

$\mathbf{v_{n+1} = 0{,}9v_n}$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison : 0,9

b . $v_0 = u_0 - 300 = 110 - 300 = -190$

Pour tout entier naturel n :

$v_n = v_0 \times 0{,}9^n$

et $u_n = v_n + 300$

$\mathbf{u_n = -190 \times 09^n + 300}$

c . On doit obtenir le plus grand entier naturel n tel que : $u_n <= 220$

$-190 \times 0{,}9^n + 300 \leqslant 220 \quad .\Leftrightarrow. \quad 80 \leqslant 190 \times 0{,}9^n \quad .\Leftrightarrow. \quad \frac{80}{190} \leqslant 0{,}9^n$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$.\Leftrightarrow.\ \ln(\frac{80}{190}) \leqslant \ln(0{,}9^n) \quad .\Leftrightarrow.\ \ln(\frac{80}{190}) \leqslant n\ln(0{,}9)$

or $0{,}9 < 1$ donc $\ln(0{,}9) < 0$

$.\Leftrightarrow.\ \ln(\frac{80}{190}) : \ln(0{,}9) \geqslant n$

On obtient avec la calculatrice

$\ln\left(\frac{80}{190}\right) : \ln(0{,}9) \simeq 8{,}21$

donc le plus grand entier naturel n tel que $u_n \leqslant 220$ est **<u>8</u>**

la valeur affichée par l'algorithme précédent sera : 2012 + 8 = **2020**

5 . $u_n = -190 \times 0{,}9^n + 300$

or $-190 \times 0{,}9^n < 0$

donc pour tout entier naturel n on a $u_n < 300$

En proposant 300 places il y aura toujours assez de places pour les exposants.

$0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 300$

Pour n assez grand le nombre d'exposants sera voisin de 300.

Donc le responsable a raison de proposer : 300 places.